NO SE LE PUEDE ENSEÑAR NADA A UN HOMBRE,

SÓLO SE LE PUEDE AYUDAR A BUSCAR DENTRO DE SÍ MISMO

Galileo Galilei

FUNCIONES DE VARIABLE REAL

I Presentación Pág. 4

II Objetivos Pág. 7

1. Definiciones Pág. 9

1.1 Conjunto de partida
1.2 Conjunto de llegada
1.3 Función de variable real
1.4 Dominio
1.5 Imagen
1.6 Rango
1.7 Ejercicios

2. Álgebra de las funciones Pág. 22

2.1 Composición de funciones
2.2 Multiplicación por un escalar
2.3 Suma, resta, multiplicación de funciones
2.4 División de funciones
2.5 Ejercicios

3. Clasificación de las funciones Pág. 41

3.1 Función Inyectiva
3.2 Función Sobreyectiva
3.3 Función Biyectiva
3.4 Ejercicios

4. **Gráfica de una función de variable real** Pág. 54

4.1 Tabla de valores de una función
4.2 Interceptos con los ejes coordenados
4.3 Tipos de funciones
4.3.1Función identidad, lineal y constante
4.3.2 Técnicas de graficación por rotación, traslación
4.3.3Función valor absoluto
4.3.4 Técnicas de graficación por rotación, traslación
4.3.5 Función cuadrática
4.3.6 Técnicas de graficación por rotación, traslación
4.3.7 Análisis de la función cuadrática
4.3.8 Función cúbica
4.3.9 Técnicas de graficación por rotación, traslación
4.3.10 Función raíz cuadrada
4.3.11 Técnicas de graficación por rotación, traslación
4.3.12 Función por partes
4.3.13 Técnicas de graficación por rotación, traslación
4.4 Ejercicios

5. **Inversa de una función** Pág. 261

5.1 Relación geométrica entre las gráficas de una función y su inversa
5.2 Técnica de cálculo de la inversa
5.3 Ejercicios

6. **Función Polinomial** Pág. 283

6.1 Ceros de una función polinomial
6.2 Gráfica
6.3 Ejercicios

7. Función Racional Pág. 298

7.1 Asíntota de una curva

7.2 Clases de funciones racionales

7.2.1 Función racional propia

7.2.2 Gráfica de una función racional propia

7.2.3 Función racional impropia

7.2.4 Gráfica de una función racional propia

7.2.5 Ejercicios

PRESENTACIÓN

Cada subtema empezará con una exploración de conocimientos previos o con alguna tarea que se pide la resuelva, ya sea utilizando procesos conocidos o dejando a la creatividad de cada uno. Para esto el estudiante debe hacer uso de las distintas habilidades del pensamiento, como la observación, comparación, clasificación, análisis, síntesis, calcular, bosquejar, reflexionar, comprender y memorizar; de esta manera, se conduce al estudiante a que infiera o deduzca conceptos, definiciones, establezca patrones, identifique propiedades, genere gráficas, etc.

En el ***Tema 1*** de definiciones se parte del concepto de Relación para definir el de Función y el de todos los conceptos que tienen que ver como dominio, imagen y rango. Para ello se presentan ejemplos de relaciones algunas de las cuales son funciones y otras no, y se pide que en base a la observación de características esenciales se discrimine las que determinan que una relación sea función; luego se dan varios ejercicios y el estudiante debe verificar si cumplen o no con aquellas características de las funciones. Finalmente el propio estudiante elabora una definición de función. Un proceso similar se sigue para definir los demás conceptos.

Una vez aprendido el concepto de dominio de una función por medio del análisis y con la utilización de la técnica de preguntas se hace reflexionar la técnica para calcular el dominio de cualquier función de variable real; También se incluyen ejercicios resueltos que son modelos de resolución. Al final del capítulo hay ejercicios de refuerzo para afianzar los conocimientos.

En el ***Tema 2*** de Álgebra de funciones, se desarrollan la composición, multiplicación por un número real, suma, resta, multiplicación y división entre funciones; en cada caso se hace énfasis en el aprendizaje significativo para introducir el nuevo concepto.

Aquí se utiliza la observación, la reflexión y la técnica de preguntas para que el estudiante descubra las características de cada operación y describa el proceso de cálculo haciendo referencia a cómo se hace, qué se hace y para qué. De esta manera se asegura la apropiación del conocimiento.

Como en el tema anterior se presentan ejercicios resueltos para modelar las técnicas de cálculo y evidenciar los pasos del proceso de resolución de ejercicios. Al final hay ejercicios de refuerzo del conocimiento.

En el ***Tema 3*** de Clasificación de las funciones, Igual que en el primer capítulo se presentan ejemplos de funciones Inyectivas y otras que no lo son, por medio de la observación de características esenciales que diferencian a la función inyectiva de la que no lo es. Luego se refuerza el concepto con ejemplos en los que con la técnica de preguntas se ayuda a que el estudiante se apropie del conocimiento y a hacerlo consciente de que sabe que sabe; finalmente se motiva al estudiante a escribir una definición formal de función inyectiva.

De la misma forma se procede con las funciones Sobreyectivas y Biyectivas. Luego se invita a que se dibuje un gráfico que represente la clasificación de las funciones. Al final del tema hay ejercicios de refierzo.

En el ***Tema 4*** referente a la gráfica de una Función de Variable Real, por medio de la técnica de la construcción de una tabla de valores se descubre la forma de cada una de las funciones especiales y se describen las características de éstas, como los interceptos con los ejes coordenados.

Así mismo se hace notar la relación entre el dominio y el rango y el reflejo de éstos en el plano cartesiano, de tal manera que, se obtenga el a partir de la gráfica el dominio y rango de una función.

Para cada función especial como la Identidad, lineal, constante, cuadrática, etc, se reflexiona los cambios que experimenta cada una cuando se la multiplica por un número o cuando se le suma o resta al dominio o imagen de tal manera que se establecen reglas de graficación para cada caso lo que permite graficar una unción sin hacer la tabla de valores.

Para cada caso hay muchos ejercicios donde se presentan los diferentes casos para cada tipo de función, aplicando el ***Método preventivo***.

Cuando se grafica la Función Cuadrática, se incluye un análisis profundo de ésta, calculando el vértice y su interpretación como máximo o mínimo de la función; teniendo en cuenta su aplicación futura a problemas de administración y economía.

La función por partes recibe un tratamiento detallado en cuanto a su graficación, al final como siempre hay muchos ejercicios para afianzar las técnicas de graficación.

En los ***Tema 5, 6 y 7*** sobre la Inversa de una función, función polinomial y función racional, se sigue una técnica igual que los temas 1, 2 y 3 para descubrir el concepto y redactar una definición, así mismo se dan muchos ejercicios por resolver y se reflexiona sobre cada paso para identificar los pasos del procedimiento de resolución hasta establecer una regla de procedimiento tomando en cuenta características esenciales.

En general, se aplican las recomendaciones de la escuela activa, basada en el constructivismo que plantea la necesidad de darle al estudiante las actividades apropiadas que le permitan seguir estrategias que le ayuden a descubrir el conocimiento, apropiarse de él y hacerlo consciente hasta automatizarlo pero bajo la guía y el acompañamiento del maestro.

OBJETIVOS

1. Definiciones

Objetivo: Definir con exactitud conceptos básicos de las funciones de variable real para la comprensión y análisis de los diferentes tipos de funciones.

2. Álgebra de las funciones

Objetivo: Definir las operaciones algebraicas y resuelve ejercicios de aplicación en forma correcta

3. Clasificación de las funciones

Objetivo: Clasificar funciones correctamente según el análisis de los conjuntos de llegada y rango..

4. Gráfica de una función de variable real

Objetivo: Reconocer los tipos de funciones utilizando una tabla de valores; graficar funciones haciendo uso de las técnicas de rotación y traslación en forma correcta.

5. Inversa de una función

Objetivo: Calcular la inversa de una función de forma autónoma

6. Función Polinomial

Objetivo: Graficar una función polinomial en forma aproximada usando los ceros de la función

FACULTAD DE EDUCACIÓN A DISTANCIA Y POSTGRADOS

MAESTRÍA EN DISEÑO Y EVALUACIÓN DE MODELOS EDUCATIVOS

TEMA

PROPUESTAS DE METODOLOGÍAS TECNOLÓGICAS ACTIVAS E INNOVADORAS EN EL INTER-APRENDIZAJE DE LAS FUNCIONES DE VARIABLE REAL PARA ESTUDIANTES DE SEGUNDO AÑO DE BACHILLERATO

PROYECTO FINAL PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE MAGISTER EN DISEÑO Y EVALUACIÓN DE MODELOS EDUCATIVOS

ANEXO 1

MANUAL DE TRABAJO DEL ESTUDIANTE

AUTOR

LIC. JAVIER LAYANA RUIZ

TUTORA

DRA. GLADYS CRIOLLA PORTILLA, MSC

GUAYAQUIL - ECUADOR

AGOSTO 2010

7. Función Racional

Objetivo: Definir y clasificar una función racional correctamente.

Graficar funciones racionales con precisión tomando como referencia asíntotas de las funciones racionales

Función

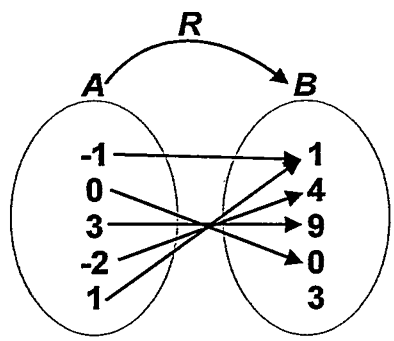
1. Relación

Como se sabe una relación entre dos conjuntos A y B, está determinada por un "nexo" que hace corresponder elementos del conjunto A al conjunto B. Este nexo se denomina "regla de correspondencia". Al conjunto A se lo llama conjunto de partida CP y al conjunto B conjunto de llegada CLL.

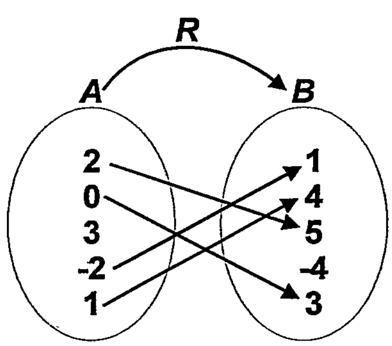
Por ejemplo:

$R: A \to B$, tal que $R = \{(x,y)/y = x^2\}$, donde $A = \{-1, 0, 3, -2, 1\}$ y $B = \{1, 4, 9, 0, 3\}$.

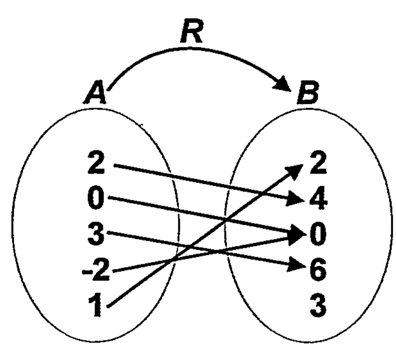
donde R está definida por $R = \{(1,1); (-1,1); (-2,4); (3,9), (0,0)\}$. Su grafo será:



Otros ejemplos de relaciones:



$R: \{2, 0, 3, -2, 1\} \to \{1, 4, 5, -4, 3\}$
$R = \{(x,y)/y = x + 3\}$



$R: \{2, 0, 3, -2, 1\} \to \{2, 4, 0, 6, 3\}$
$R = \{(x,y)/y = |x| + x\}$

De entre todas las relaciones, hay algunas especiales que se denominan Funciones. Para reconocerlas, relicemos el siguiente trabajo:

A continuación se presentan algunos ejemplos de relaciones, entre las cuales hay algunas que son funciones. Identifique las características esenciales tanto de las relaciones que no son funciones, como de las que lo son. Descríbalas.

Características esenciales

No fuciones	Funciones

Compare ambas características y establezca las semejanzas y diferencias

Características semejantes

No fuciones	Funciones

Características diferentes

No fuciones	Funciones

¿Cuando tengamos que identificar a las funciones, cuáles características nos sirven?

¿Por qué?

Escriba una ***definición formal*** de función

____

____

____

____

Una Función f, $f: A \to B$ es de Variable Real, si y sólo si, $A \subseteq \mathbb{R}$ y/o $B \subseteq \mathbb{R}$. Por ejemplo:

$$f: \mathbb{R}^{-} \to \mathbb{R}^{+},\ f(x) = x^2,$$

$$g: (-3, 5] \to [10, -14],\ g(x) = 1 - 3x,$$

$$h: \mathbb{R} - [1, 4) \to \mathbb{R} - (-1, -4],\ h(x) = -|x|.$$

Dada las siguientes relaciones, indique si son o no funciones justificando la respuesta.

a) Si $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y^3 = x^2\}$ ________________________________

____

b) Si $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |y| = x\}$ ________________________________

____

c) Si $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = x^2 + 1\}$ ________________________________

____

d) Si $h = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = x^3\}$ ________________________________

____

Rango de una función

Es el conjunto formado por todas las imágenes.

$$Rang = \{y/y = f(x)\}$$

$$Rangf = \{4, 0, 6\}$$

Determinación del dominio de una función

i) En la función *f*, tal que $f(x) = \frac{1}{x+3}$, encuentre:

a) $f(0) =$

b) $f(-1) =$

c) $f(-3) =$

Si encontró alguna dificultad, expliquela...

____

____

Así como $10 \div 5 = 2 \iff 5 \times 2 = 10$;

para $z \in \mathbb{R}$, entonces $1 \div 0 = z \iff 0 \times z = 1$,

pero ¿A qué es igual $0 \times z$?

¿$0 \times z = 0$? o ¿$0 \times z = 1$?

¿Existe algún número real para el cual no se puede dividir?

____

¿Qué valores de $\mathbb{R}$ pueden reemplazarse por *x* en la regla de correspondencia de la función *f*, $f(x) = \frac{1}{x+3}$?

____

Si encontró alguna dificultad, expliquela...

____

¿Cuánto vale $\sqrt{-1}$, $\sqrt[4]{-16}$, $\sqrt{-9}$, $\sqrt[3]{-8}$?

____

¿Qué raíz pudo calcular y cuáles no?

____

En la función $g(x)=\sqrt{x+2}$.

Determine $g(-1.9), g(-1.99), g(-1.999999), g(-2), g(-2.000001), g(-2.01)$.

____

____

____

¿Desde qué valores de $\mathbb{R}$ podría calcular la imagen?

____

¿Para qué funciones se presentan dificultades de este tipo?

____

¿Tendría la misma dificultad con la función $F(x)=\sqrt[3]{x+2}$?

____

Es decir, $+\sqrt{3}-2,\ -\sqrt{3}-2$, no son parte del dominio porque ocasionan una división por cero.

Por tanto, $Dom\,f = \{x/x \in \mathbb{R} - \{+\sqrt{3}-2,\ -\sqrt{3}-2\}\}$

2. $g(x) = \dfrac{|x|-x}{|x|+x}$

$|x|+x=0$

Si $x \in \mathbb{R}^-$, el denominador es cero;

si $x = 0$, el denominador es cero;

si $x \in \mathbb{R}^+$, el denominador es mayor que cero.

Por tanto, $Dom\,g = \{x/x \in \mathbb{R}^+\}$

3. $h(x) = \dfrac{|5-3x|-2}{\sqrt[3]{2x-16x^3}}$

Como si es posible extraer raíz impar de números negativos, sólo se analizan los valores que ocasionan una división por cero;

$$\sqrt[3]{2x-16x^3}=0$$
$$2x-16x^3=0$$
$$2x(1-8x^2)=0$$
$$2x(1+\sqrt{8}x)(1-\sqrt{8}x)=0$$

$$2x=0 \ \vee \ 1+\sqrt{8}x=0 \ \vee \ 1-\sqrt{8}x=0$$
$$x=0 \ \vee \ \sqrt{8}x=-1 \ \vee \ -\sqrt{8}x=-1$$
$$x=0 \ \vee \ x=-\frac{1}{\sqrt{8}} \ \vee \ x=-\frac{1}{-\sqrt{8}}$$
$$x=0 \ \vee \ x=-\frac{1}{\sqrt{8}} \ \vee \ x=\frac{1}{\sqrt{8}}$$

Es decir, $0,\ -\frac{1}{\sqrt{8}},\ \frac{1}{\sqrt{8}}$ no son parte del dominio porque ocasionan una división por cero.

Por tanto, $Dom\,h = \{x/x \in \mathbb{R} - \{0,\ -\frac{1}{\sqrt{8}},\ \frac{1}{\sqrt{8}}\}\}$

EJERCICIOS # 1

1. En las siguientes funciones, calcule las imágenes que se indican.

   a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ f(x)=-|-4+|x+2||$ $\qquad f(6)=?$

   b) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ g(x)=|x|x$ $\qquad g(-2)=?$

   c) $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}; h(x)=|x^2+4x-5|$ $\qquad h(-2)=?$

   d) $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ p(x)=-\sqrt{-x}$ $\qquad p(-4)=?$

   e) $r:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ r(x)=\dfrac{x-|x|}{x}$ $\qquad r(0)=?$

2. Encontrar en cada caso los valores de A y B que correspondan

   a) Si $f(x)=2x^3+Ax^2+4x-5$, y $f(2)=5$

   b) Si $g(x)=\dfrac{3x+8}{2x-A}$ y $g(0)=2$

   c) Si $h(x)=\dfrac{x-B}{x-A}$, $h(2)=0$ y $h(1)=$ no está definido

3. Determine el rango de las siguientes funciones.

   a) $F(x)=|x|+1$

   b) $G(x)=-\sqrt{x}$

   c) $H(x)=x^3$

   d) $Z(x)=x-3$

   e) $F(x)=\sqrt{-x}$

4. Halle el dominio de las siguientes funciones

   a) $g(x)=\dfrac{x-2}{x^3+x}$

   b) $h(x)=\sqrt{x^2-9}$

   c) $F(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$

   d) $G(x)=\sqrt{x^2-x-2}$

   f) $H(x)=\sqrt{\dfrac{x-2}{x+1}}$

Álgebra de las Funciones

2.1 Composición de funciones

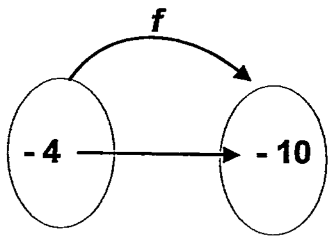
Como se ha visto para evaluar una función en algún valor de su dominio se reemplaza dicho valor en su regla de correspondencia.

Por ejemplo: Si $f(x)=3x+2$ y se desea calcular $f(-4)$, se tendrá:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x+2 \\ f(-4) &= 3(-4)+2 \\ f(-4) &= -12+2 \\ f(-4) &= -10 \end{aligned}$$

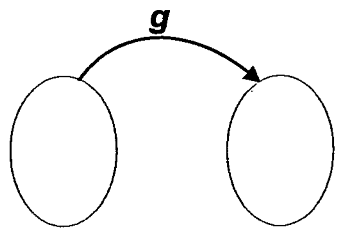
El valor -10 así obtenido recordemos se llama imagen de -4 por la función *f*.

Visualizando esto mediante un grafo se tendrá:



Ahora pensemos que este valor -10, es parte del dominio de otra función *g*, donde $g(x)=1-2x$; calcule entonces $g(-10)$.

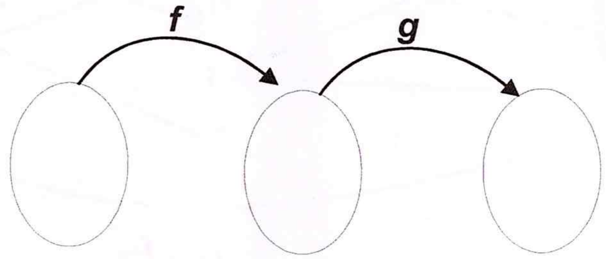
Represéntelo mediante un grafo como en el caso anterior



____

____

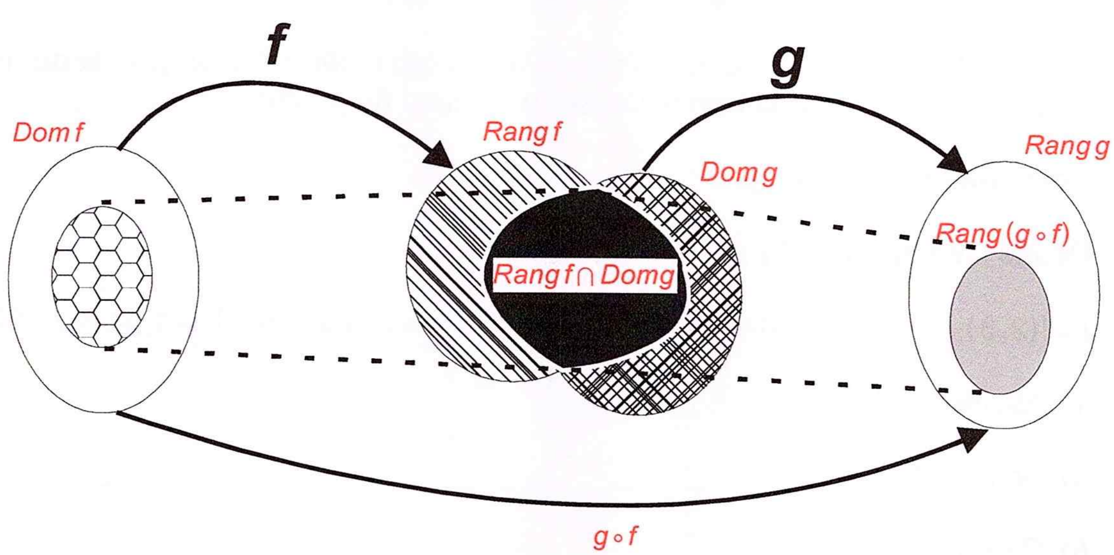
Su representación gráfica será entonces:



Un resultado así obtenido es otra función obtenida a partir de f y de g, y se denomina "***Composición de g con f***" y se denota por $(g \circ f)(x)$, tal que:

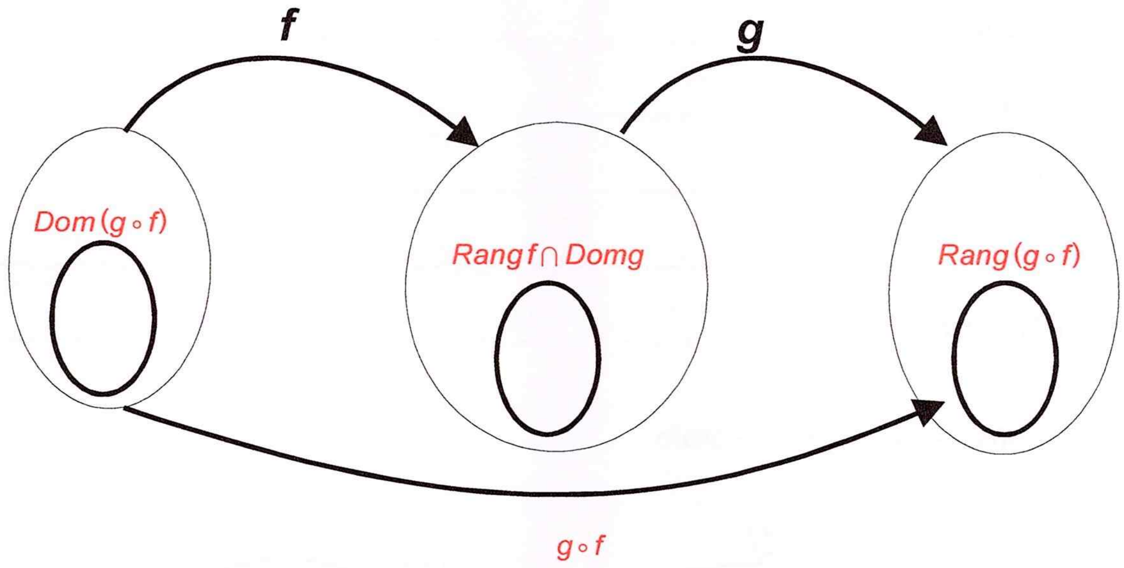
$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Un análisis detallado de la composición de funciones tomando en cuenta los dominios y sus conjuntos de llegada y rango se puede observar en la siguiente representación gráfica



.

b) Complete el siguiente grafo



c) Determine $g \circ f = ?$ ______________________________

Ahora pensemos en cómo calcular $f \circ g$

Si $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, entonces ¿a qué es igual $(f \circ g)(x)$?

____

Complete:

- ✓ No se puede obtener $f \circ g$ si antes no se calculan las imágenes de ____.
- ✓ La intersección entre el ______________________________ tiene un papel preponderante en la formación de $f \circ g$ (hace de posta).

Resuelva el siguiente ejercicio

Dadas las funciones *f* y *g* como sigue:

$f = \{(2,3);(-1,2);(0,-3);(4,5);(1,-2)\}$; $g = \{(-2,4);(3,2);(5,6);(-1,2);(-3,0)\}$

b) $(g \circ f)(x) = ?$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$
$$(g \circ f)(x) = 2(x^2 - 2x) + 1$$
$$(g \circ f)(x) = 2x^2 - 4x + 1$$

Resuelva los siguientes ejercicos:

1. $f = \{(2,-3);(1,4);(-5,0);(0,-2);(3,-4)\}$ y $g = \{(0,-1);(-2,7);(1,-3);(3,0);(2,4)\}$.

Calcular $f \circ g$; $f \circ f$; $g \circ g$

2. $f = \{(-1,2);(0,3);(2,0);(-3,4)\}$ y $g = \{(2.-1);(3,0);(0,2);(4,-3)\}$

Calcular $g \circ f$; $f \circ f$; $g \circ g$

3. $f(x) = 1 - 2x$; $g(x) = 4x^2 - 5$; $h(x) = \sqrt{x+2}$

Calcular $(g \circ f)(x)$; $(f \circ f)(x)$; $(g \circ g)(x)$; $(f \circ g)(x)$; $(g \circ h)(x)$; $(h \circ f)(x)$; $(h \circ h)(x)$

4. Dadas las funciones $h = \{(1,-4);(0,2);(-3,5);(3,3)\}$ y $m(x) = \frac{x-3}{5}$. Calcule:

a) $m \circ h =$ ____

b) $m \circ m =$ ____

c) $h \circ m =$ ____

d) $h \circ h =$ ____

e) $[(m \circ h) \circ m] =$ ____________________________________

2.3 Suma de funciones

A continuación se presenta un ejercicio resuelto de suma de funciones, observe, analice y describa los pasos del procedimiento para realizar dicha suma.

Sean $f=\{(2,-1);(0,8);(-2,5);(1,-6)\}$; $g=\{(5,4);(0,3);(-2,0);(1,2);(3,-3)\}$.

Calcule $f+g$:

$$Dom f=\{2,0,-2,1\}; Dom g=\{5,0,-2,1,3\}$$
$$Dom(f+g)=Dom f\cap Dom g$$
$$Dom(f+g)=\{-2,0,1\}$$
$$f+g=\{(-2,5+0);(0,8+3);(1,-6+2)\}$$
$$f+g=\{(-2,5);(0,11);(1,-4)\}$$

Pasos del proceso para sumar dos funciones:

i) ____

ii) ____

iii) ____

____

Resuelva el ejercicio, siguiendo los pasos anteriores:

$$Dadas\ f=\left\{\left(-1,-\frac{1}{3}\right);(4,2);\left(\frac{2}{5},-1\right);(1,3);(2,-3);(0,2)\right\}\ y$$
$$g=\left\{(1,4);(0,-3);(4,0);\left(-1,\frac{2}{6}\right);(3,6);\left(\frac{5}{2},1\right)\right\}.$$

Calcule $f+g$:

$$Dom f= \qquad\qquad ; Dom g=$$
$$Dom(f+g)=Dom f\cap Dom g$$
$$Dom(f+g)=$$
$$f+g=$$

2.5 Multiplicación de funciones

Siendo la multiplicación un operador matemático similar a la suma, ¿Cómo se multiplicarían las funciones?

Resuelva el siguiente ejercicio:

1. Dadas las funciones g y h. Calcule $g \cdot h$

$h = \{(4,1);(-2,7);(2,-3);(1,-9);(0,0)\}$; $g = \{(0,-3);(4,2);(2,0);(1,6);(-3,3);(-1,5)\}$

2. Dadas las funciones $f(x) = -x + 1$; $z(x) = 1 + 5x$; $(f \cdot g)(x)$.

3. Dadas las funciones $r(x) = \frac{5-x}{x-3}$; $t(x) = \frac{x^2-9}{x+2}$; $(r \cdot t)(x)$.

3. $\left(\sqrt{f+2g}\right)(x)$

4. $[(z-2h)+(g^2+f)](x)$

2.6 División de funciones

Siendo la división otro operador matemático como los anteriores, lo lógico es que se proceda como en la suma, resta y multiplicación; pero ¿recuerda Ud. cuando calculaba el dominio de una función? ¿qué dificultades se podrían encontrar?

____

____

____

Resuelva el siguiente ejercicio, siguiendo los pasos del proceso para las otras operaciones:

$f(x)=\{(2,-1);(3,0);(4,2):(0,6)\}$; $g(x)=\{(2,2);(3,5);(4,0);(0,2)\}$. Calcule $\frac{f}{g}$.

a) $Dom f=$ ____________________

b) $Dom g=$ ____________________

c) $Dom f \cap Dom g=$ ____________________

d) $\frac{f}{g}=$ ____________________

¿Existe alguna dificultad al hacer la división de las imágenes?

____

____

¿Qué representan los elementos de este conjunto?

____

Describa los pasos para dividir dos funciones

____

____

____

Definición formal:

$$(f \div g)(x) = f(x) \div g(x)\,;\ Dom(f \div g) = Dom f \cap Dom g - \{g(x)\,;\ g(x) = 0\}$$

Siga el procedimiento correspondiente para resolver los siguientes ejercicios:

1. Dadas las funciones m y n. Calcule $g \div h$

$m = \{(4,1); (-2,7); (2,-3); (1,-9); (0,0)\}$; $n = \{(0,-3); (4,2); (2,0); (1,6); (-3,3); (-1,5)\}$

2. Dadas las siguientes funciones; $f(x) = 4x - 3$; $g(x) = -2x$; $h(x) = \frac{3}{x+1}$; $z(x) = \frac{x-2}{x-5}$.

a) $(2f \div g) \cdot (f - 3g)(x)$

b) $[f^2 \cdot g \div (h + 2g)](x)$

c) $\left(\sqrt{f \div 2g}\right)(x)$

d) $[(z \cdot 2h) \div (g^2 - f)](x)$

3. Dadas las funciones *f, g, h* y *m* ; tal que:

$f=\{(2,3);(-1,2);(0,-3);(4,5);(1,-2)\}$; $g=\{(-2,4);(3,2);(5,6);(-1,2);(-3,0)\}$

$h=\{(1,1);(-2,0);(3,-2);(0,-1);(4,-5);(-3,2)\}$;

$m=\{(0,0);(-2,1);(3,0);(4,-10);(1,2)\}$

Calcular: a) $g\circ f=?$; b) $\frac{h}{m}=?$

4. Dadas las funciones f, g y h , tal que: $f(x)=1-2x$; $g(x)=4x^2-5$;

$h(x)=\sqrt{x+2}$.

a) Encuentre: $F(x)=?$, tal que, $F(x)=(g\circ h)(x)$

b) Calcule: $(f-F)(x)=?$

c) Halle: $(\frac{g}{h^{-1}})(x)=?$

d) Determine: $Dom\,F(x)=?$

5. Dadas las funciones $f=\{(2,-3);(1,4);(-5,0);(0,-2);(3,-4)\}$ y

$g=\{(0,-1);(-2,7);(1,-3);(3,0);(2,4)\}$.

Halle $\frac{f^2}{g}$

6. Dadas las funciones f y g ; tales que:

$f=\{(-1,2);(0,3);(2,0);(-3,4)\}$; $g=\{(2.-1);(3,0);(0,2);(4,-3)\}$.

Calcule $\left(\frac{f}{g^{-1}}\right)(x)$

7. Si $F(x)=4x^2-5x+6$ y $g(x)=-2+3x$. Calcule h, tal que $F(x)=2h(x)-3g(x)$

8. Si $F(x)=\frac{2x-1}{x+4}$ y $g(x)=x^2-2$. Calcule f, tal que $F(x)=\frac{f(x)}{g(x)+f(x)}$

9. Si $F(x)=\frac{2x^2+4}{x(x^2-4)}$ $f(x)=\frac{2}{x+2}$ y $g(x)=\frac{1}{x}$.

16. Dadas las funciones *f*, *g*, *h*, *z* tales que:

$$f=\{(1,-2);(2,3);(0,-1);(-1,7);(5,4);(-4,-2);(-3,6)\}$$
$$g=\{(0,0);(-1,2);(5,3);(8,4);(-4,6);(2,1);(-2,5)\}$$
$$h=\{(-1,-2);(4,3);(0,8);(8,7);(-5,4);(-4,-2);(-3,7)\}$$
$$z=\{(7,2);(0,-3);(9,-1);(2,7);(-3,4);(6,2);(3,1);(8,2)\}$$

Calcule:

1) $(f+g)\circ h=?$
2) $2f\div(3g\circ z)=?$
3) $g^2\circ\dfrac{1}{h+z}=?$
4) $(h+f)\circ(z-g)=?$

17. Demuestre que $(f\circ g)\circ z=f\circ(g\circ z)$; si $f(x)=3-2x$, $g(x)=x^2-x$ y $z(x)=\sqrt{x}$.

Clasificación de las funciones

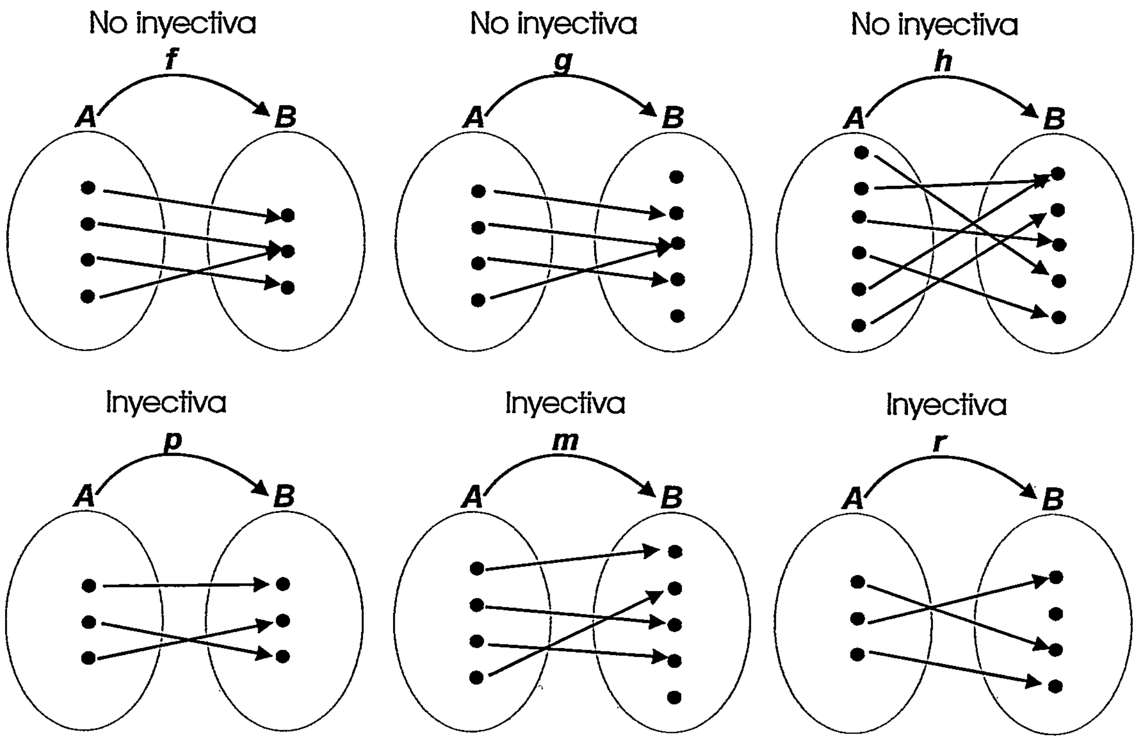
De entre todas las funciones hay algunas especiales, lo que nos lleva a clasificarlas según cumplan o no ciertas características.

3.1 Función inyectiva

Para conocerla, realicemos la siguiente tarea:

A continuación se dan ejemplos de funciones inyectivas, y de otras que no lo son.

Observe y escriba las características esenciales de las que son inyectivas y de las que no lo son en el lugar indicado.



Características esenciales

Función Inyectiva	Función NO inyectiva

Para que una función sea inyectiva se debe cumplir que:

____

____

____

____

"La definición del concepto de un objeto debe contener la característica esencial del objeto".

Escriba una ***definición formal*** de función inyectiva

____

____

____

____

¿Cuáles de las siguientes funciones son inyectivas? Escriba su respuesta en el lugar indicado.

a) $f=\{(2,3);(0,1);(-2,-3);(4,0);(3,3)\}$ ____________________

b) $g=\{(6,3);(7,5);(2,-3);(0,0);(3,4)\}$ ____________________

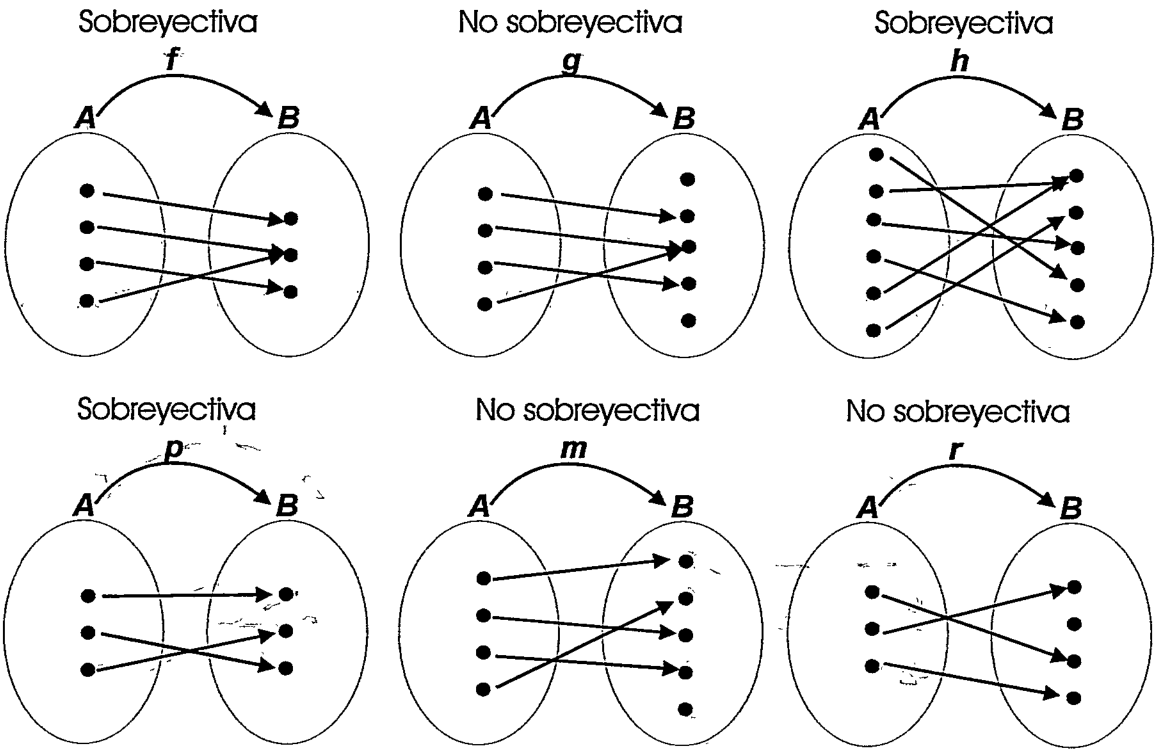
c) $h=\{(1,3);(0,3);(-5,3);(-4,3);(3,3)\}$ ____________________

3.2 Función sobreyectiva

Para conocerla, realicemos la siguiente tarea:

A continuación se dan ejemplos de funciones sobreyectivas, y de otras que no lo son.

Observe y escriba las características esenciales de las que son Sobreyectivas y de las que no lo son en el lugar indicado.



Características esenciales

Función Sobreyectiva	Función NO Sobreyectiva

Compare ambas características y establezca las semejanzas y diferencias

Características semejantes

Fución Sobreyectiva	Función NO Sobreyectiva

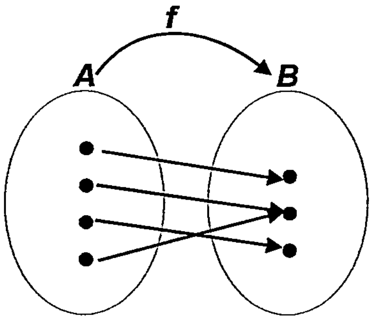
3.3 Función biyectiva

Para conocerla, realicemos la siguiente tarea:

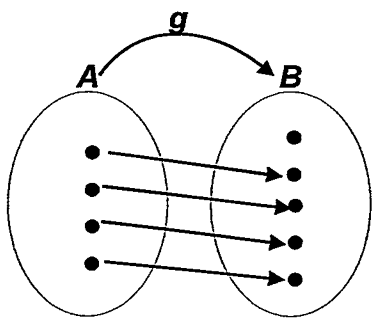
A continuación se dan ejemplos de funciones biyectivas, y de otras que no lo son.

Observe y escriba las características esenciales de las que son biyectivas y de las que no lo son en el lugar indicado.

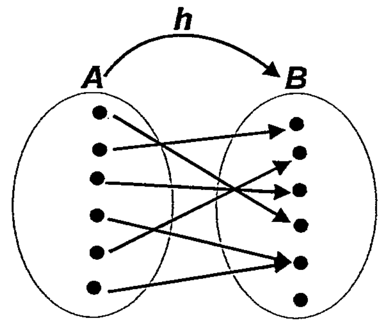
No biyectiva



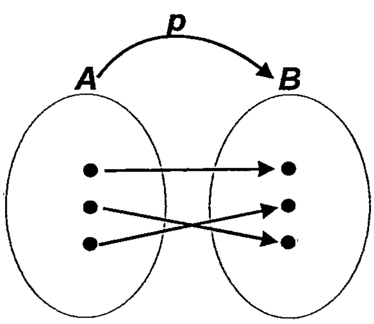
No biyectiva



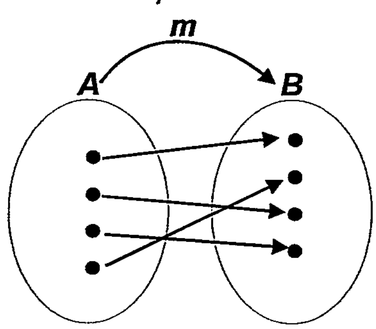
No biyectiva



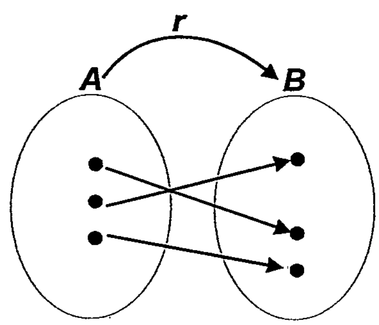
Biyectiva



Biyectiva



Biyectiva



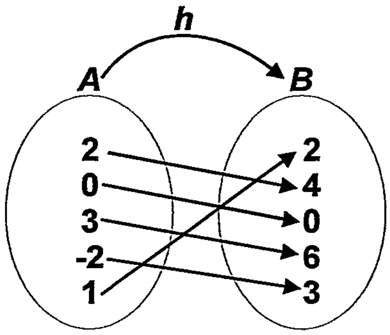
Características esenciales

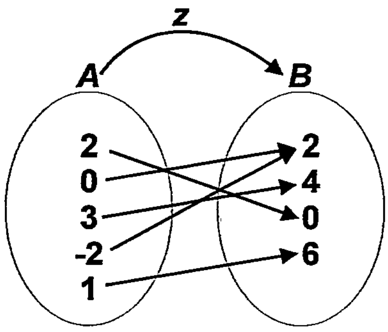
Función biyectiva	Función NO biyectiva

Compare ambas características y establezca las semejanzas y diferencias

Características semejantes

Fución biyectiva	Función NO biyectiva





_______________ _______________

_______________ _______________

Complete correctamente

Para que una función sea biyectiva se debe cumplir que:

____

____

____

____

"La definición del concepto de un objeto debe contener la característica esencial del objeto".

Escriba una ***definición formal*** de función biyectiva

____

____

____

____

¿Cuáles de las siguientes funciones son biyectivas? Escriba su respuesta en el lugar indicado.

a) $f: \{2, 0, -2, 4, 3\} \rightarrow \{1, 0, -3, 4, 3\}$; $f = \{(2,3); (0,1); (-2,-3); (4,0); (3,4)\}$

____

Dibuje un esquema que muestre la clasificación de las funciones

EJERCICIOS # 3

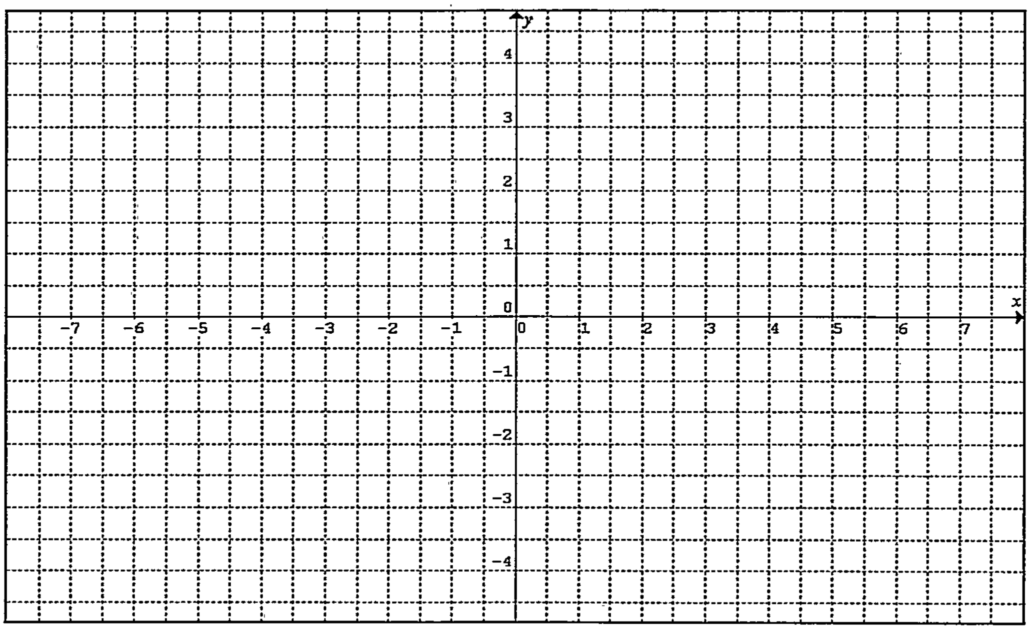
Analice las siguientes funciones y determine si son o no biyectivas. Justifique su respuesta.

1. $f: \mathbb{R}^+ \to (-1,+\infty),\ f(x)=|x|-1$
2. $g: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to [4,+\infty),\ g(x)=(x-2)^2$
3. $h: [0,+\infty) \to [0+\infty),\ h(x)=\sqrt{x}$
4. $z: \mathbb{R}-(-2,5) \to \mathbb{R}-(0,9),\ z(x)=x+2$
5. $m: (-2,+\infty) \to (-1,+\infty),\ m(x)=(x+2)^2-1$
6. $p: \{3,2,-1,0\} \to \{9,0,1,4\},\ p(x)=x^2$
7. $q: \{1,-3,-1,0\} \to \{-9,-1,-5,-3,7\},\ q(x)=2x-3$
8. $F: \{6,-8,1,-5,7\} \to \{2,0,-3,9,2,1\},\ F=\{(6,1);(7,0);(-5,1);(-8,9);(1,9)\}$
9. $G: (-\infty,+\infty) \to (-\infty,+\infty),\ G(x)=-\frac{3}{5}x-4$
10. $H: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ H(x)=(x-2)^3+3$
11. $Z: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ Z(x)=\left|x-\frac{2}{3}\right|$
12. $M: \{0,4,-2,10\} \to \{7,-6,0,11\},\ M=\{(0,7);(4,0);(-2,11);(10,-6)\}$
13. $P: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ P(x)=\left|(3-x)^2-2\right|$
14. $Q: \mathbb{R}^- \to (-\infty,0),\ Q(x)=x$

Gráfica de Funciones

4.1 Representación en el Plano cartesiano

Otra forma de representar graficamente las funciones es mediante el Plano Cartesiano, éste es un sistema de referencia constituído por dos ejes perpendiculares, como lo indica la figura:



Plano cartesiano

En el eje horizontal se grafican los elementos del dominio o abscisas (variables independientes) y en el eje vertical los elementos del rango u ordenadas (variables dependientes).

Para dibujar su gráfica, se asignan valores arbitrarios ***del dominio*** a la variable independiente para reemplazarlos en la regla de correspondencia y obtener su correspondiente valor del rango. Estos datos se representan en una tabla de valores.

Analice las gráficas de las siguientes funciones y sus respectivas tabla de valores.

Ejemplos:

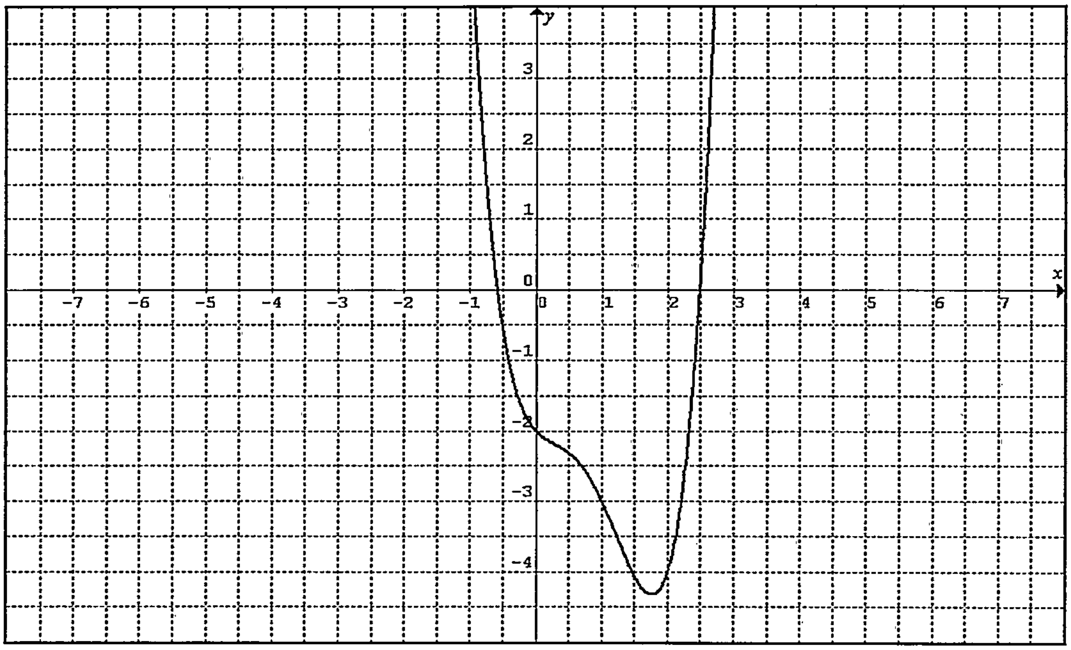
1. Para $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R},\ f(x)=x^2-x$. Su tabla de valores será:

Mientras se asignen más valores, más exacta será la representación de la gráfica en el plano cartesiano.

x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
y	31,5	24	17,5	12	7,5	4	1,5	0	-0,5	0	1,5	4	7,5	12	17,5

3. Para $h:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R},\ h(x)=x^4-3x^3+2x^2-x-2$. Su tabla de valores será:

x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	3.533	2.020	1.053	482	181	48	5	-2	-3	-4	13	90	293	712



Grafique las siguientes funciones bajo las recomendaciones dadas:

a) Observe qué valores pueden reemplazar a la variable independiente según el dominio de la función.

b) Asigne la mayor cantidad posible de valores a la abscisa para que la gráfica quede bien representada.

c) Utilice una escala apropiada.

1. $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R};\ f(x)=-x^2+3$

a) Complete la tabla

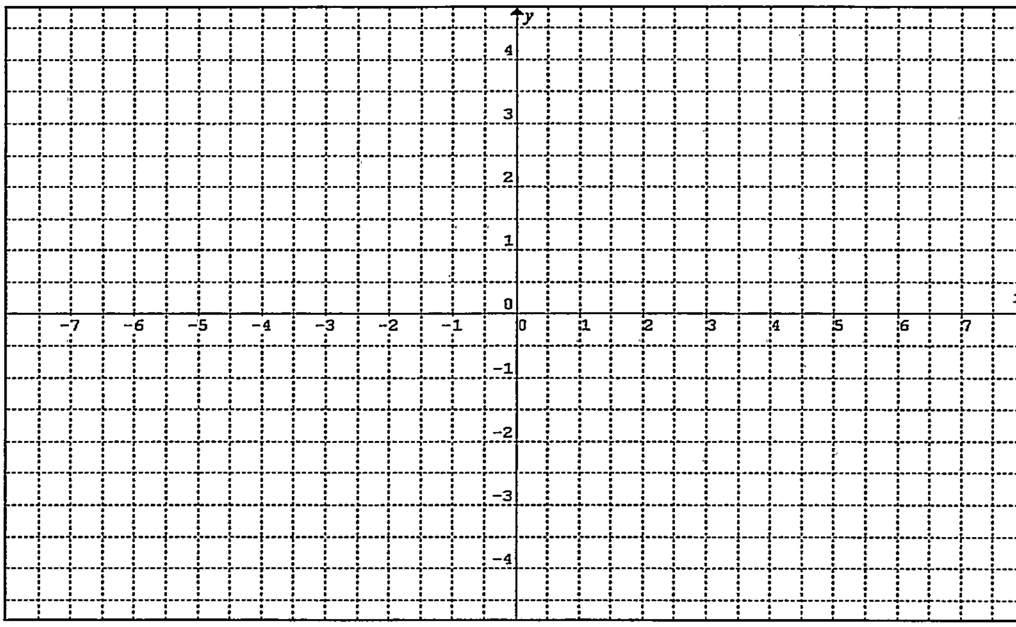
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y									

3. $h:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R};\ h(x)=x^3-2x^2+1$

a) Complete la tabla

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y												

b) Grafique la función en el plano cartesiano



4. $z:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R};\ z(x)=x^3-2x^2+1$

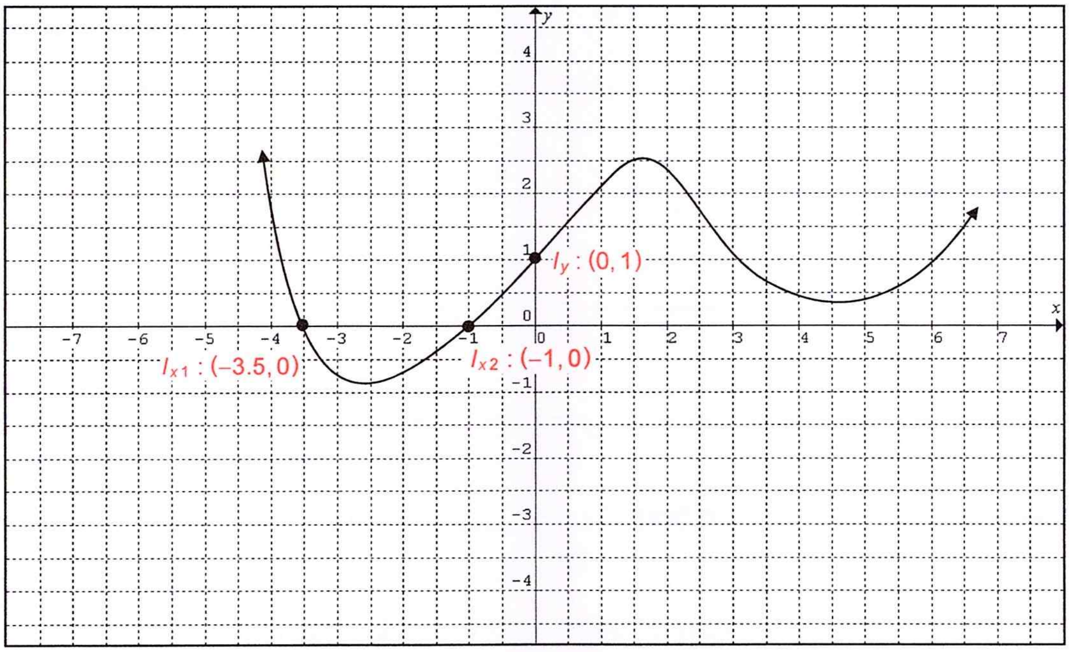
a) Complete la tabla

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y												

4.2 Interceptos con los ejes coordenados

Los interceptos de la gráfica de una función con los ejes coordenados, son las intersecciones de ésta con los ejes x i y.

En la siguiente gráfica se pueden apreciar los interceptos con el eje x $I_{x1}:(-3.5,0)$; $I_{x2}:(-1,0)$ y con el eje y $I_y:(0,1)$.



Cálculo de interceptos con el eje x

¿Qué característica tienen las coordenadas del punto de intersección de la gráfica con el eje x?

____

Por lo tanto; para calcular I_x se tiene que cumplir con una condición. ¿Cuál es esa condición?

____

Calcule el o los interceptos con el eje x de la función: $f(x)=\frac{1}{2}x^2-4x+3$

a) Escriba la condición para encontrar I_x

____

Por lo tanto; para calcular I_y se tiene que cumplir con una condición. ¿Cuál es esa condición?

____

Calcule el o los interceptos con el eje y de la función: $f(x)=\frac{1}{2}x^2-4x+3$

a) Escriba la condición para encontrar I_y

____

b) Al reemplazar x en la regla de correspondencia se tiene:

____

c) Escriba el intercepto con el eje y; $I_y:(0,$ _____$)$.

d) ¿Cuántos interceptos I_y se pueden tener como máximo?

____

e) ¿Como mínimo?

____

f) Grafique los puntos en el plano cartesiano

g) Calcule las coordenadas de algunos puntos en la vecindad de cada intercepto I_x

$P_1:?$ ____

$P_2:?$ ____

$P_3:?$ ____

$$x=-2 \vee x=1 \vee x=3$$

$$I_{x1}:(-2,0);\ I_{x2}:(1,0);\ I_{x3}:(3,0)$$

$$I_y:? \Rightarrow x=0$$

$$g(0)=(0)^3-2(0)^2-5(0)+6$$

$$g(0)=6$$

$$I_y:(0,6)$$

Los interceptos son: $I_{x1}:(-2,0);\ I_{x2}:(1,0);\ I_{x3}:(3,0);\ I_y:(0,6)$

$P_1:?\ x=-3 \Rightarrow g(-3)=(-3)^3-2(-3)^2-5(-3)+6;\ g(-3)=-24\ \therefore\ P_1:(-3,-24)$

Siga las instrucciones para graficar la siguiente función:

1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R};\ f(x) = (x-2)^2 + 1$

Calcule los interceptos con el eje x:

a) Escriba la condición

____

b) Resuelva la ecuación resultante

____

____

____

¿Cuál es la solución de la ecuación?

____

¿Qué tipo de solución se ha obtenido?

____

¿De qué manera influye este tipo solución en los interceptos?

____

¿Cómo influye la solución en la gráfica de la función?

____

Siga las instrucciones para graficar la siguiente función:

2. $f: [2, +\infty) \to [1, +\infty)$; $g(x) = \sqrt{x-2} + 1$

Calcule los interceptos con el eje x:

a) Escriba la condición

---

b) Resuelva la ecuación resultante

¿Cuál es la solución de la ecuación?

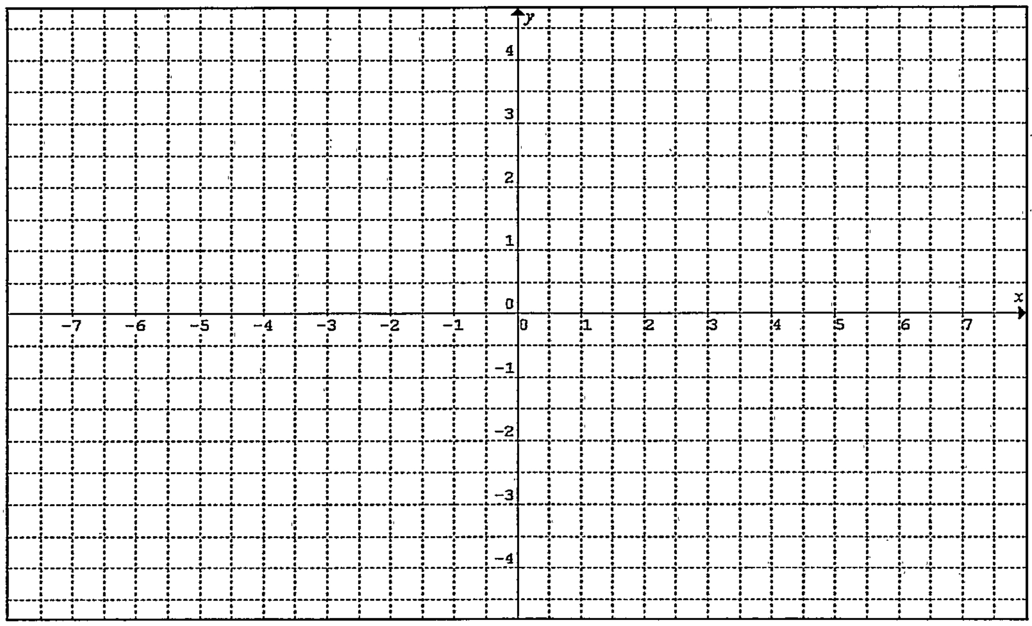
¿Qué tipo de solución se ha obtenido?

¿De qué manera influye este tipo solución en los interceptos?

¿Cómo influye la solución en la gráfica de la función?

---

d) Dibuje un bosquejo de la gráfica de la función



Escriba de forma generalizada los pasos del proceso para calcular los interceptos de una función y graficarla (tome en cuenta las diferentes posibilidades que se pueden presentar)

Describa las características geométricas que tiene la gráfica en el plano cartesiano

___

___

¿Por qué le llaman ***función Identidad***?

___

Escriba su regla de correspondencia

___

Encuentre su dominio y rango

Dom = ___

Rang = ___

¿La función identidad es inyectiva? Justifique su respuesta

___

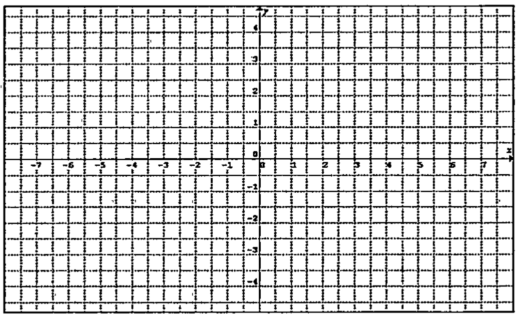
¿La función identidad es sobreyectiva? Justifique su respuesta

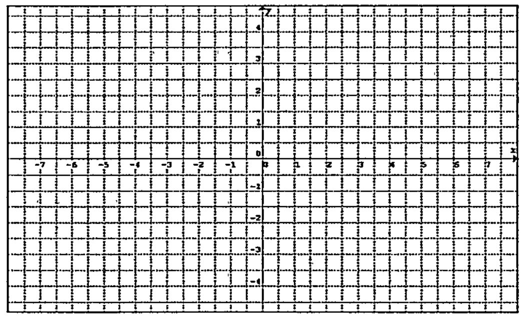
___

¿La función identidad es biyectiva? Justifique su respuesta

___

4.3.2 Función lineal





¿Cómo se podría geométricamente pasar de la una gráfica a la otra?

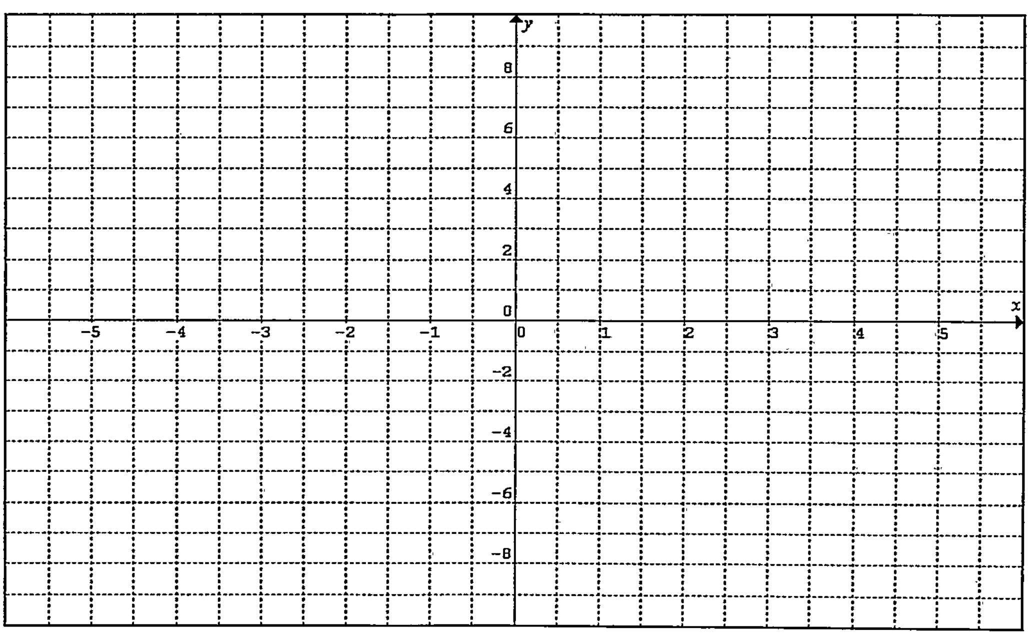
___

¿Existe alguna relación entre las gráficas de ambas funciones y la diferencia entre sus reglas de correspondencia?

___

Grafique la función $f(x) = 2x$

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y											



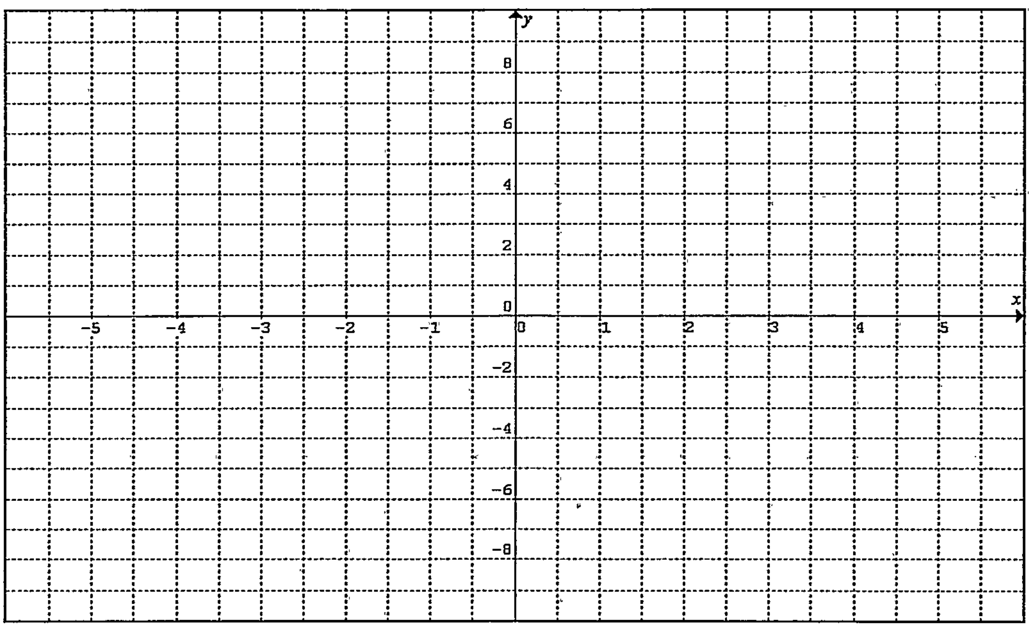
Grafique la función $f(x) = 2x$

Dibuje la gráfica de la función $f(x)=4x$ en el mismo plano cartesiano

¿Cómo serían las gráficas de $f(x)=5x$, $f(x)=6x$, $f(x)=7x$, etc?

Grafique la función $f(x)=\frac{1}{2}x$

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y											



Dibuje en el mismo plano la función identidad y compare ambas gráficas

Describa las semejanzas y diferencias

Dibuje en el mismo plano la función $f(x)=\frac{1}{3}x$

$$f(x)=x, f(x)=2x, f(x)=3x,\ f(x)=\frac{1}{2}x, f(x)=\frac{1}{3}x, f(x)=\frac{1}{4}x,$$

$$f(x)=-x, f(x)=-2x, f(x)=-3x,\ f(x)=-\frac{1}{2}x, f(x)=-\frac{1}{3}x, f(x)=-\frac{1}{4}x,$$

$$f(x)=\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Describa una reflexión sobre la relación que hay entre las diferentes orientaciones que puede tener la gráfica y su regla de correspondencia.

____

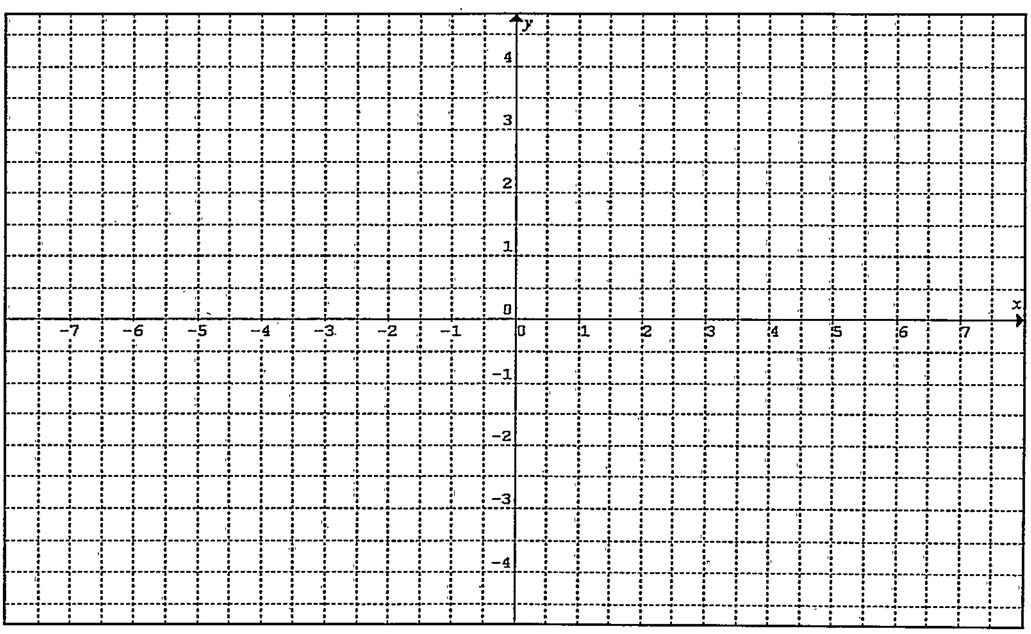
____

____

____

Grafique la función $f(x)=x+1$

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y											

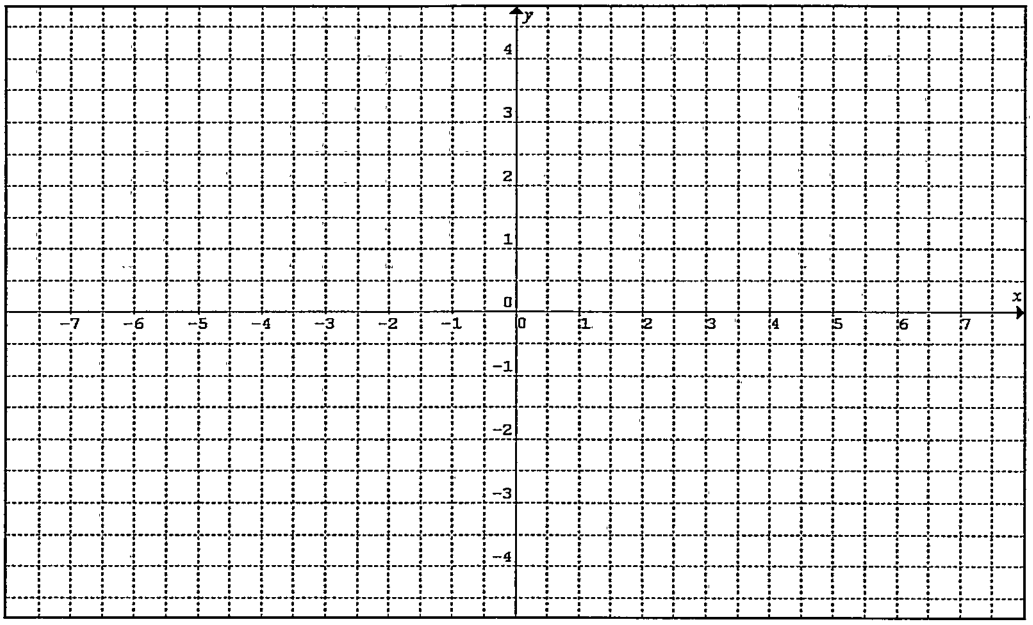


Sin calcular tabla de valores y utilizando los criterios para graficar las funciones $f(x)=ax$ y $f(x)=x+b$, dibuje un bosquejo de:

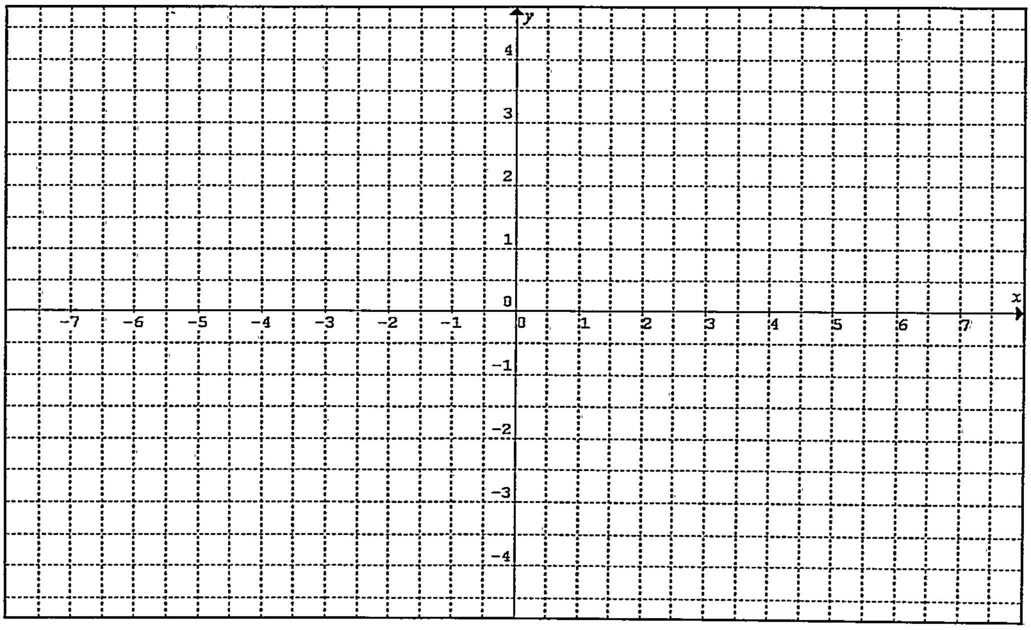
$f(x)=2x-4$; $g(x)=\frac{1}{2}x+3$; $h(x)=-\frac{1}{3}x+1$; $z(x)=-4x-\frac{5}{2}$; tome encuenta el orden de las operaciones aritméticas.

Ejercicio # 1

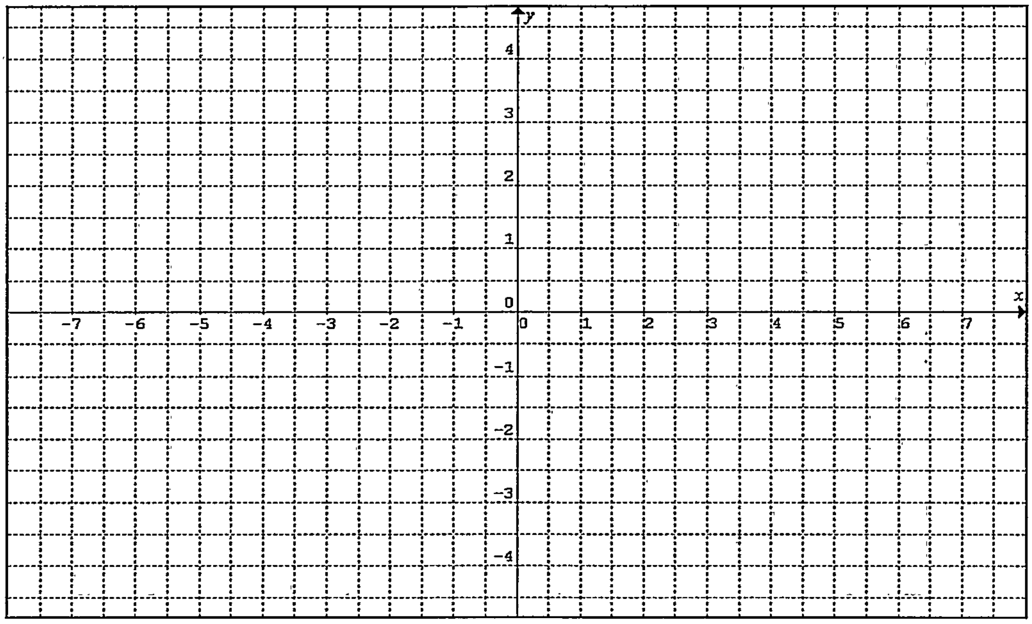
1° Grafique la función identidad $f(x)=x$



2° Grafique la función $f(x)=2x$

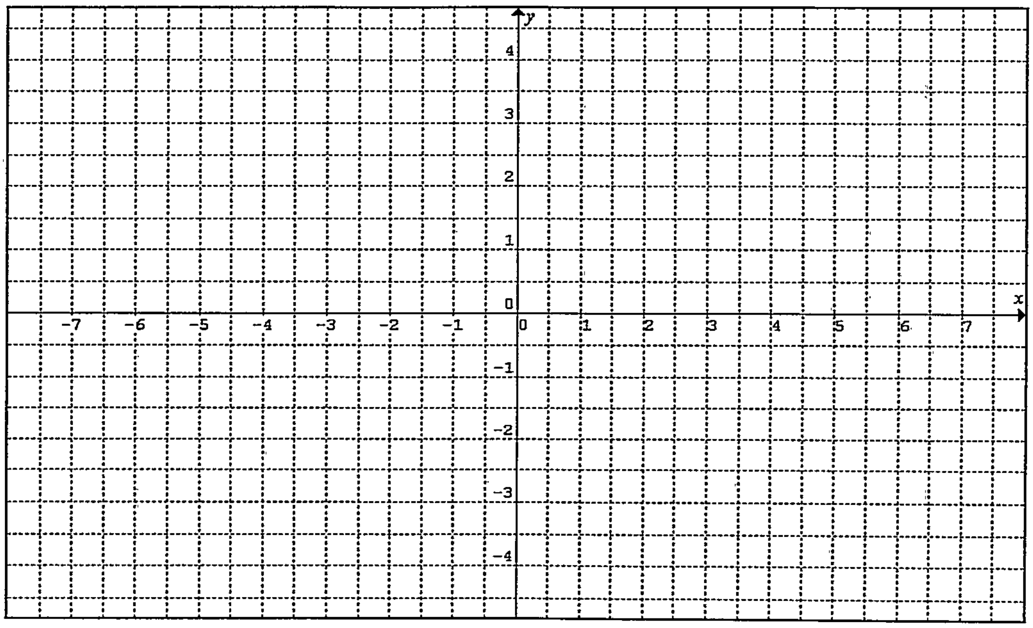


5° Dibuje la gráfica de la función $f(x) = 2x - 4$ tomando en cuenta los interceptos con los ejes coordenados. (Gráfica más exacta)



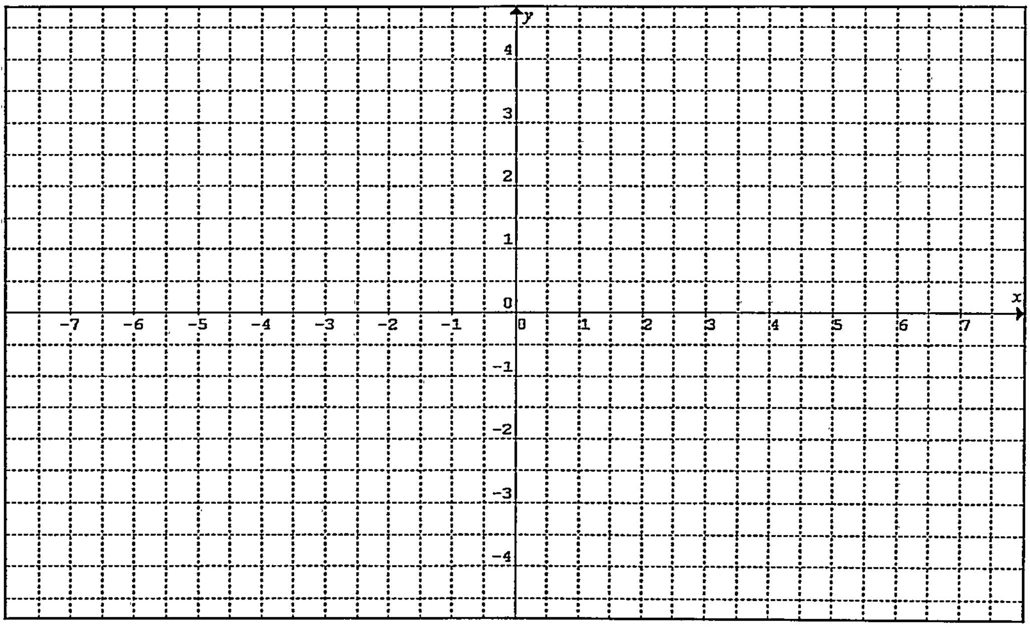
Ejercicio # 2

1° Grafique la función identidad $g(x) = x$

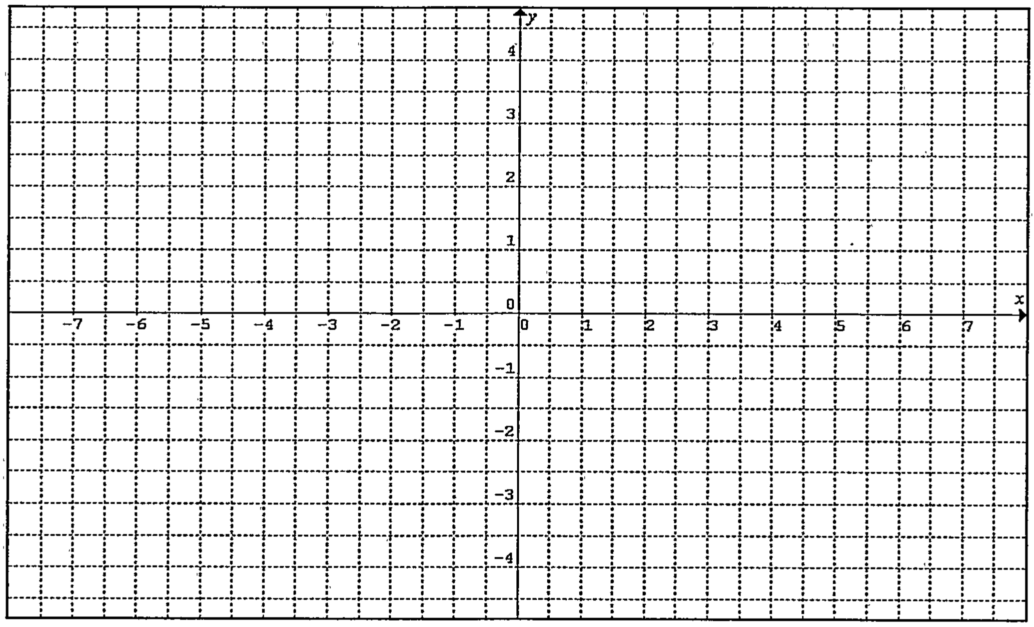


4º Calcule los interceptos con los ejes coordenados

5º Dibuje la gráfica de la función $g(x)=\frac{1}{2}x+3$ tomando en cuenta los interceptos con los ejes coordenados. (Gráfica más exacta)

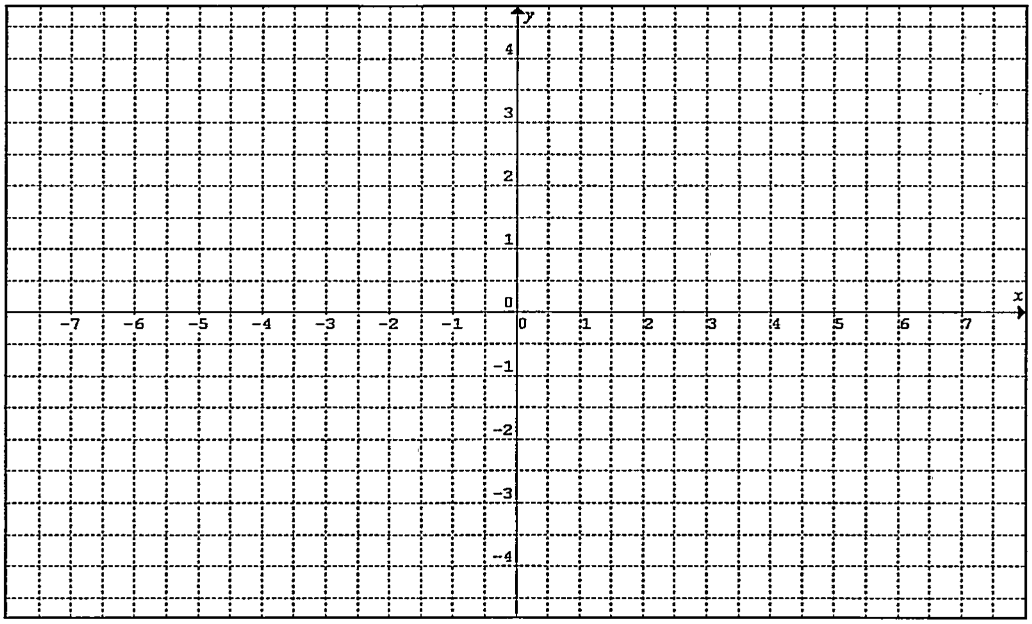


3º Grafique la función $h(x) = -\frac{1}{3}x + 1$

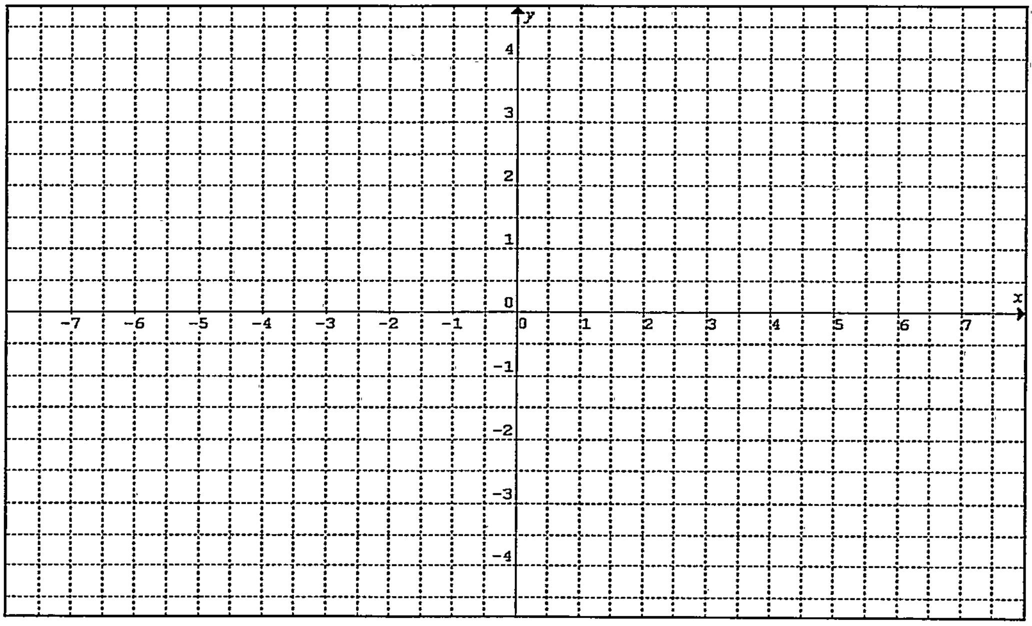


4º Calcule los interceptos con los ejes coordenados

2° Grafique la función $z(x) = -4x$



3° Grafique la función $z(x) = -4x - \frac{5}{2}$



Si $a, b \in \mathbb{R}$, escriba una regla de correspondencia que resuma las funciones anteriores:

$$f(x) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Una función representada en la forma anterior se denomina ***función lineal***.

Describa una reflexión sobre la relación que hay entre las diferentes posiciones que puede tener la gráfica y su regla de correspondencia.

____

____

____

____

____

4.3.3 Función constante

Dada la función lineal $f(x) = ax + b$ donde $a, b \in \mathbb{R}$.

Suponga que $a = 0$, entonces se tiene la función $f(x) = b$.

¿Qué diferencia hay entre las expresiones $f(x) = ax + b$ y $f(x) = b$?

____

Una función con esta característica se denomina "***función constante***".

Calcule la siguiente tabla de valores para la función constante $f(x) = 2$

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y											

Función valor absoluto

Ayuda memoria:

El *valor absoluto* de un número, es el valor *no negativo* de dicho número;

$$|-3|=3;\ \ |2|=2;\ \ |-5.67|=5.67;\ \ |0|=0$$

Dada $f(x)=x$ y su tabla de valores

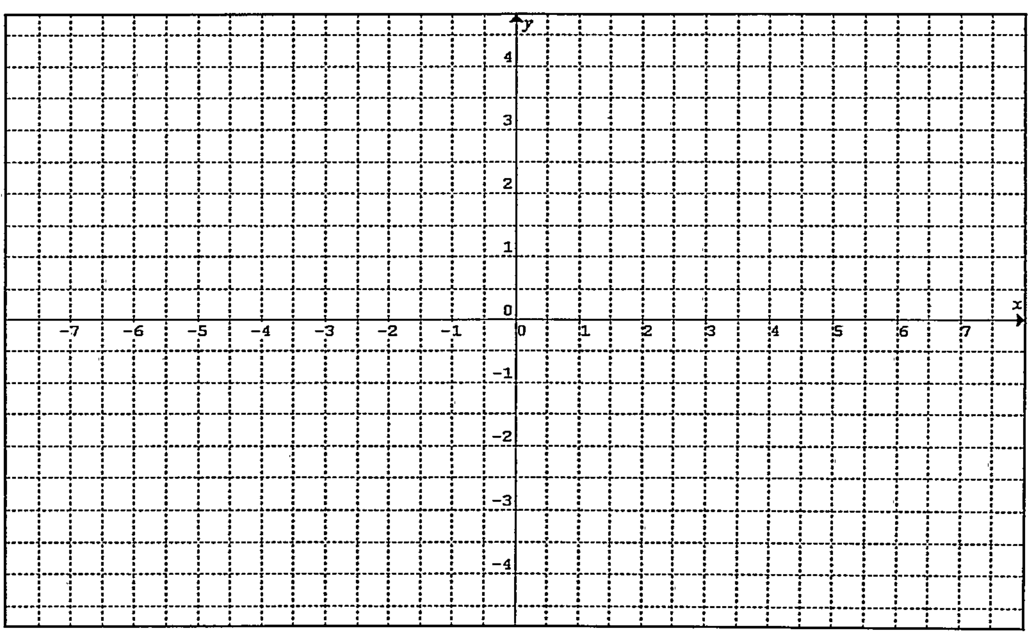
x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5

¿Cómo sería la gráfica de la ***función valor absoluto*** $f(x)=|x|$? Para ello complete la tabla de valores:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y											

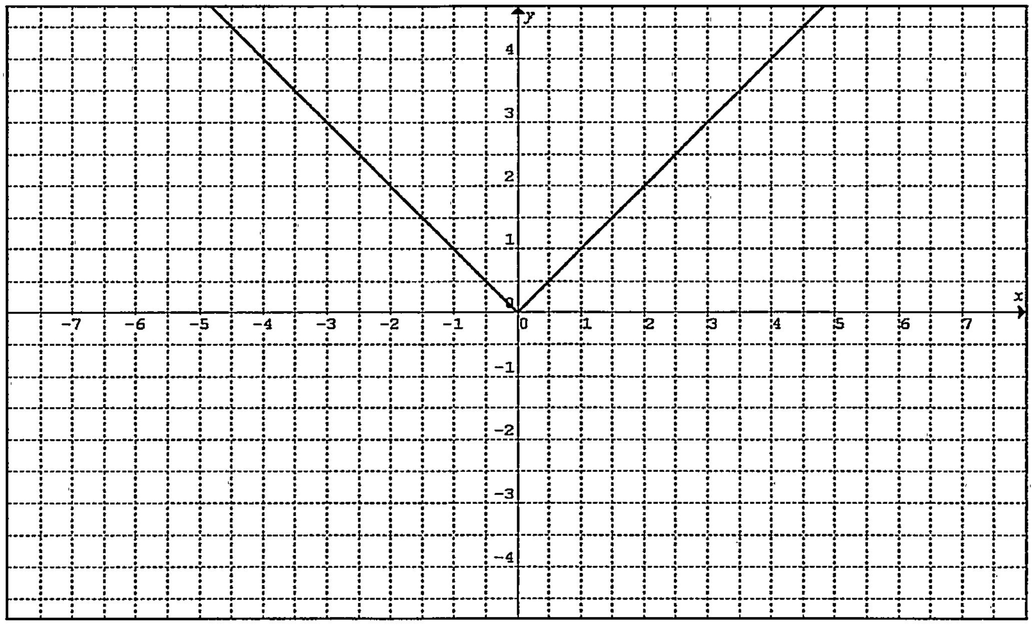
¿Qué diferencia encuentra entre las imágenes de la función identidad y la función valor absoluto?

Grafique ambas funciones en el mismo plano cartesiano

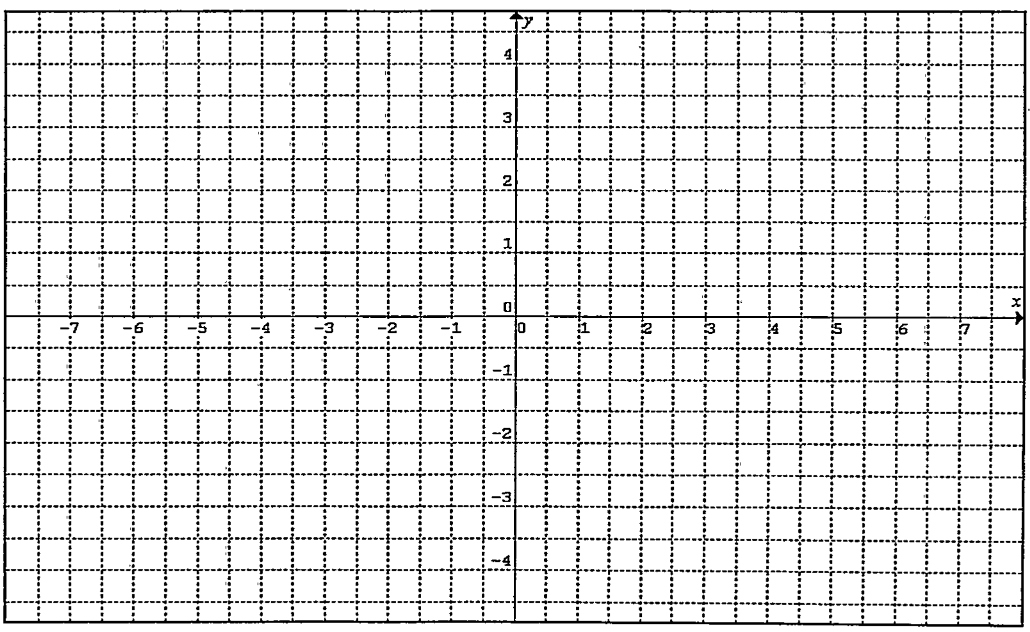


Anote otra característica de la grafica de la función valor absoluto

La forma más elemental (gráfico base) de la ***función valor absoluto*** $f(x)=|x|$ es:



Grafique la función $f(x)=|x|+1$



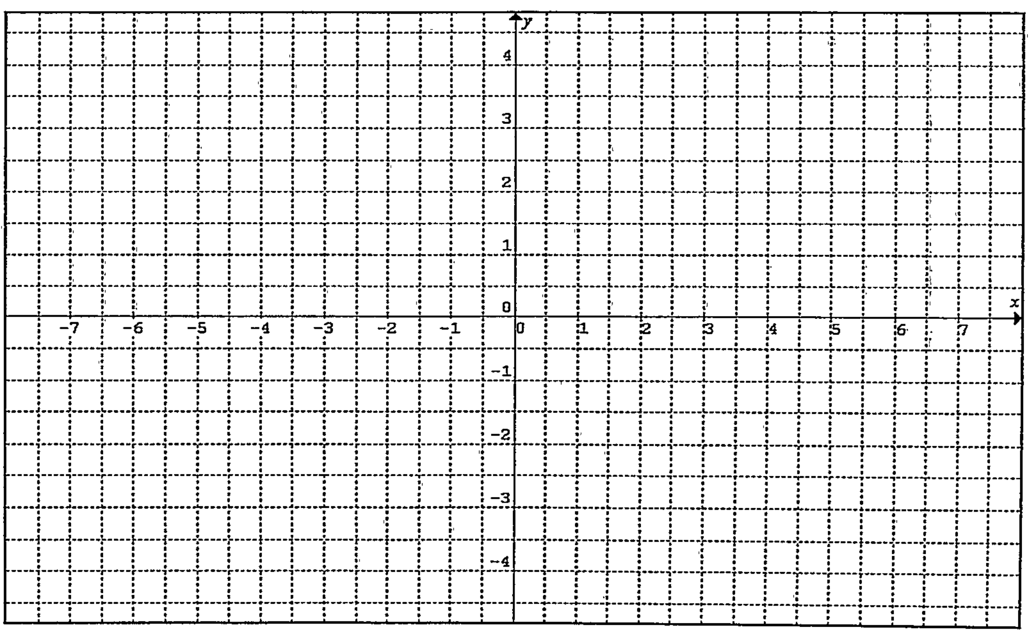
¿Qué diferencia encuentra entre las gráficas de las tres funciones?

¿Para qué valor de *d* la función se desplaza a la derecha y para qué valor de *d* se desplaza a la izquierda?

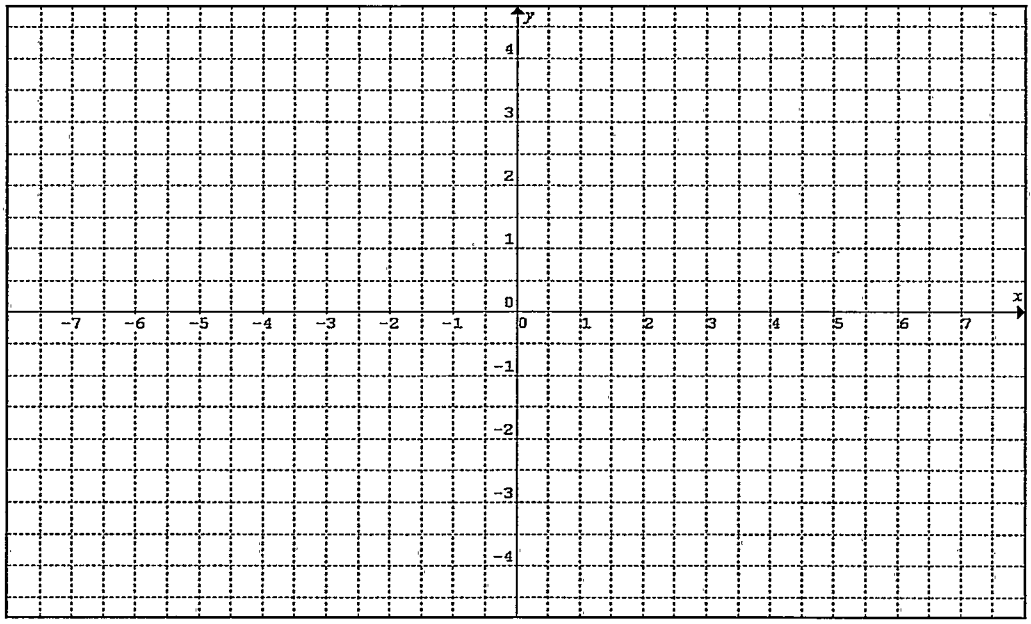
¿Para dónde se desplaza la función $f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|$?

¿Para dónde se desplaza la función $f(x)=|x+4|$?

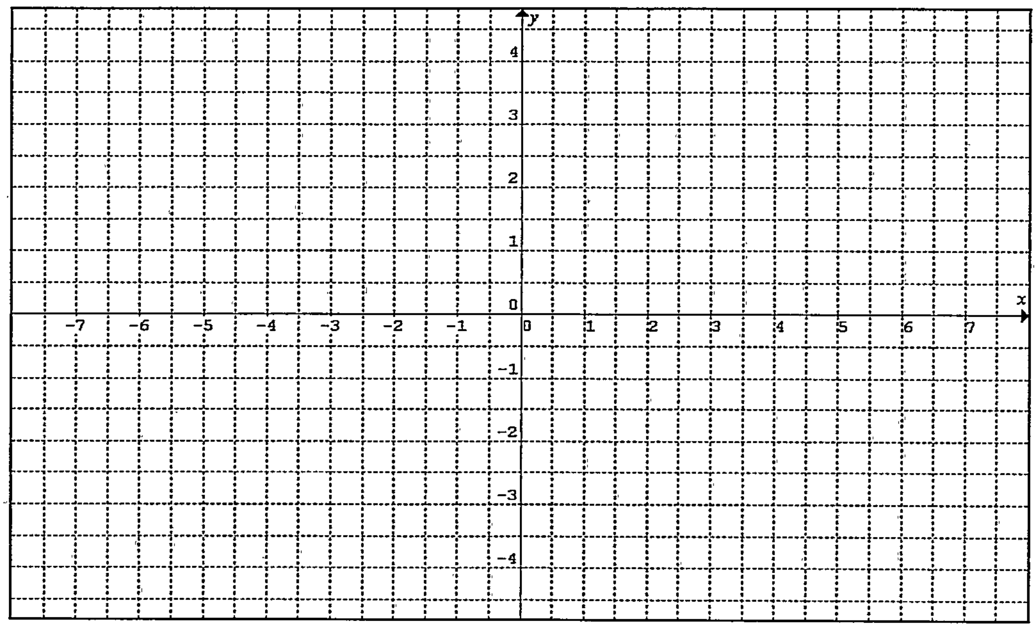
Grafique ambas funciones en el mismo plano cartesiano



2º Grafique $f(x) = |x-3|$

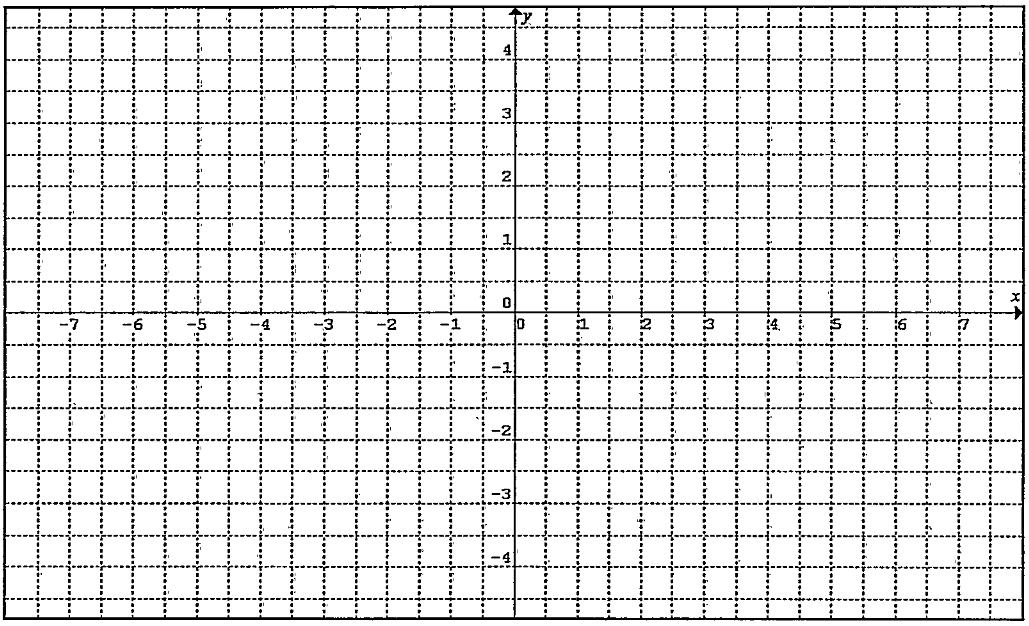


3º Grafique $f(x) = |x-3| - 2$

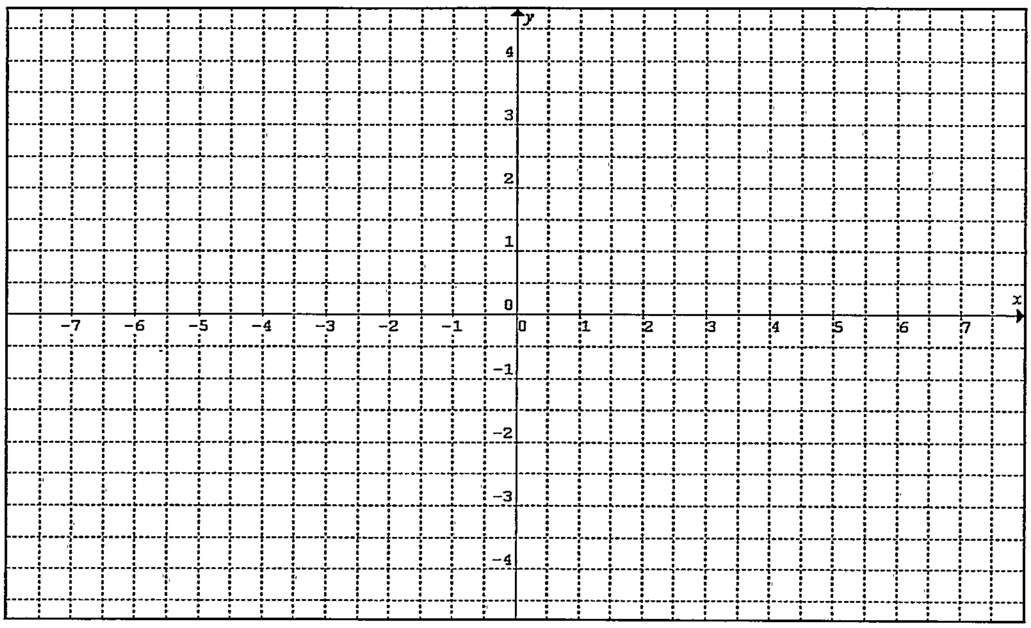


4º Encuentre los interceptos con los ejes coordenados

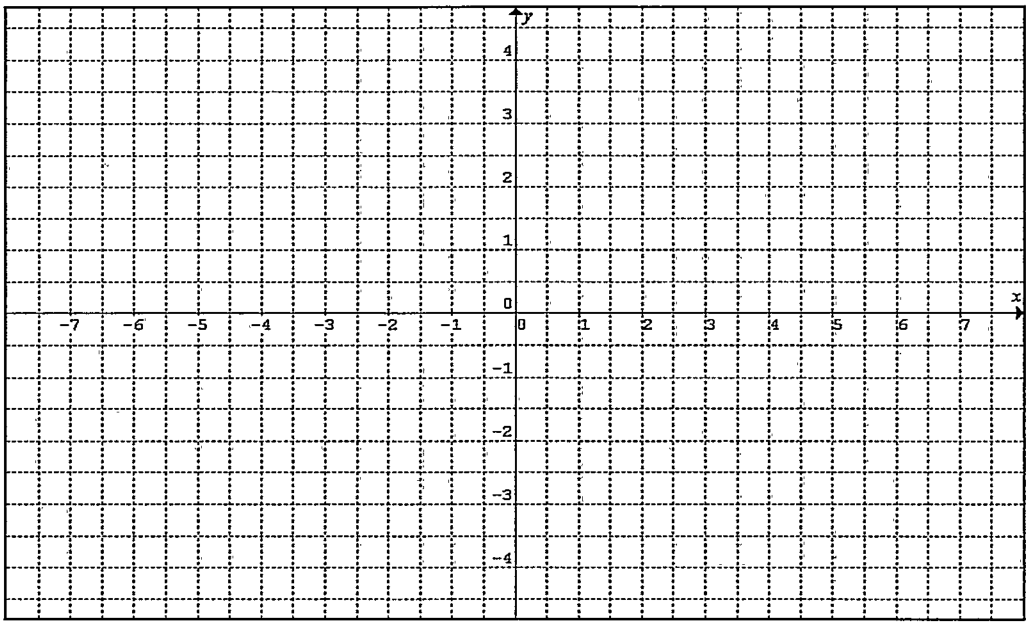
1º Grafique $g(x)=|x|$



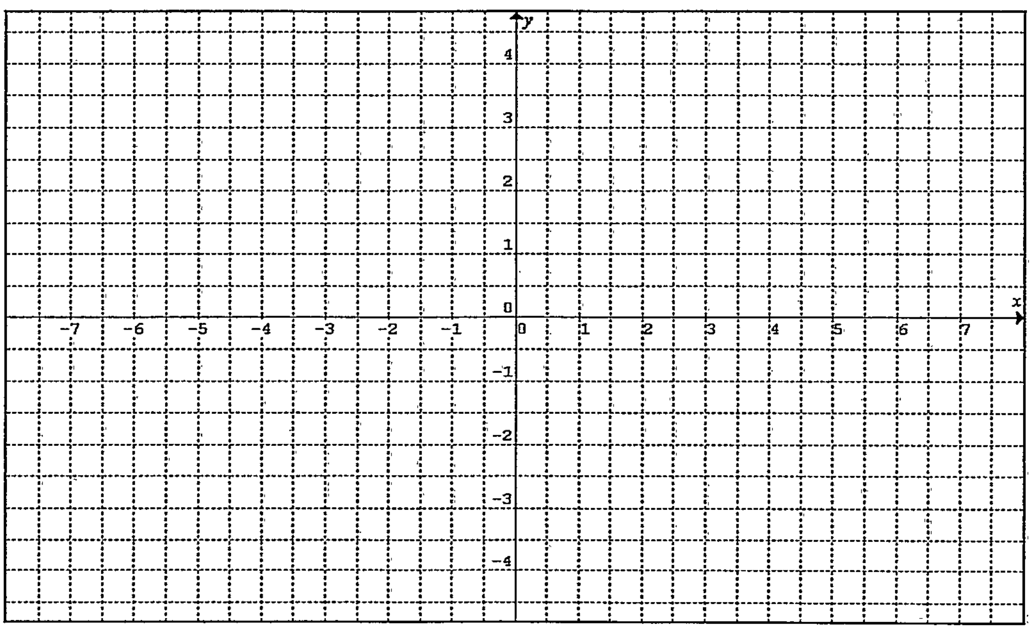
2º Grafique $g(x)=\left|x+\dfrac{5}{2}\right|$



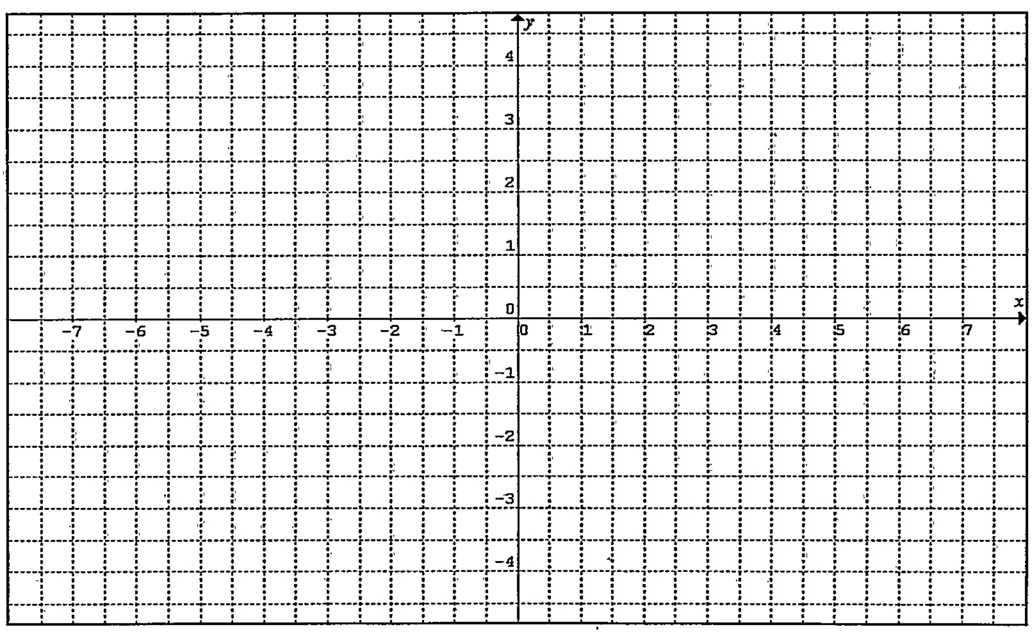
5° Dibuje la gráfica de la función $g(x)=\left|x+\frac{5}{2}\right|-1$ tomando en cuenta los interceptos con los ejes coordenados. (Gráfica más exacta)



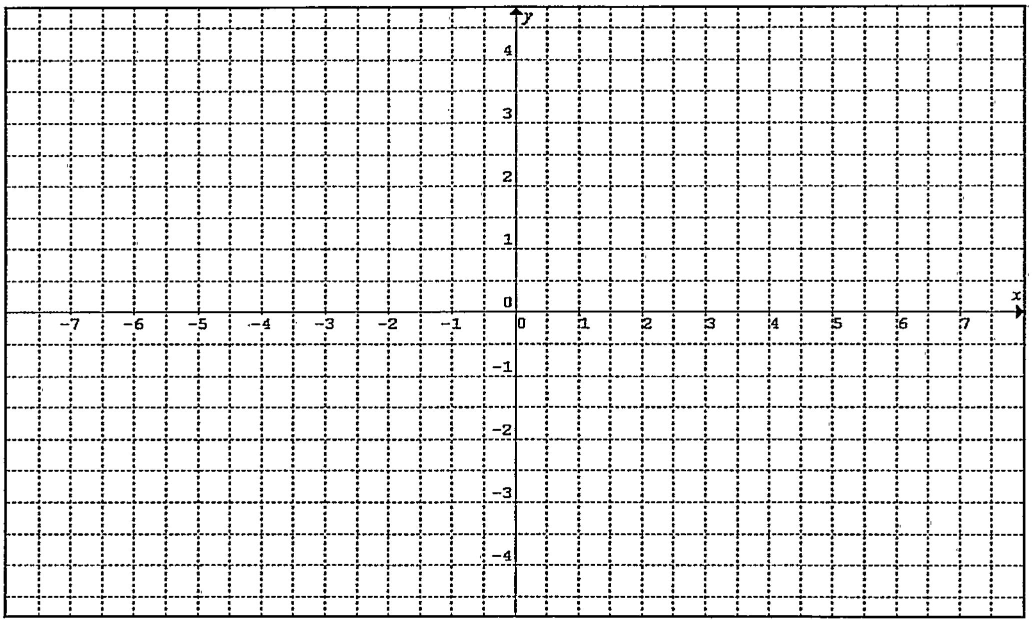
1° Grafique $h(x)=|x|$



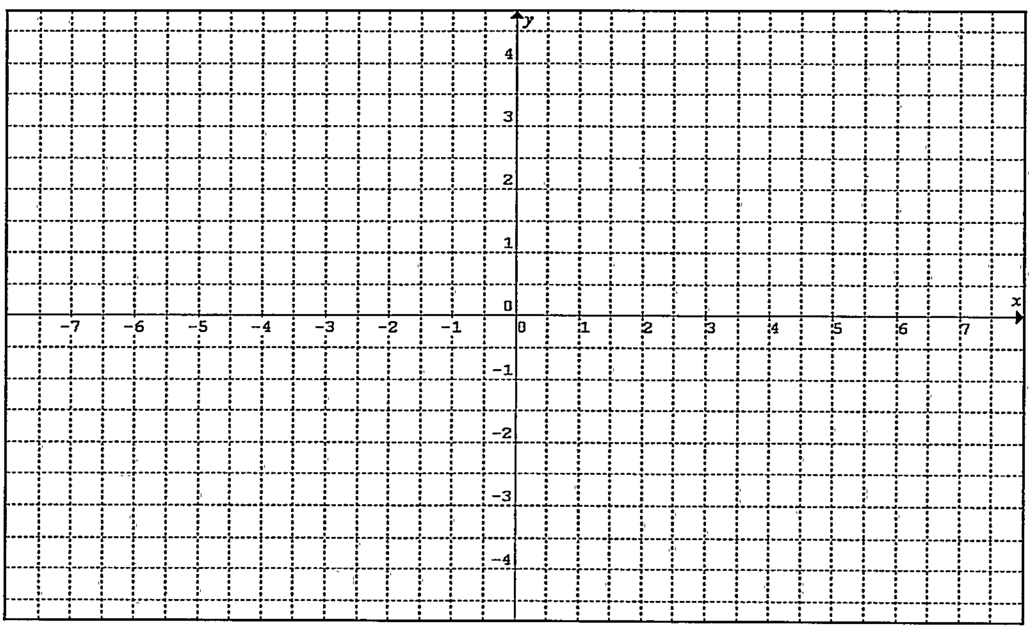
5º Dibuje la gráfica de la función $h(x) = |x-5| + \dfrac{3}{2}$ tomando en cuenta los interceptos con los ejes coordenados. (Gráfica más exacta)



2º Grafique $f(x)=|2-x|=|x-2|$



3º Grafique $f(x)=|2-x|-1$

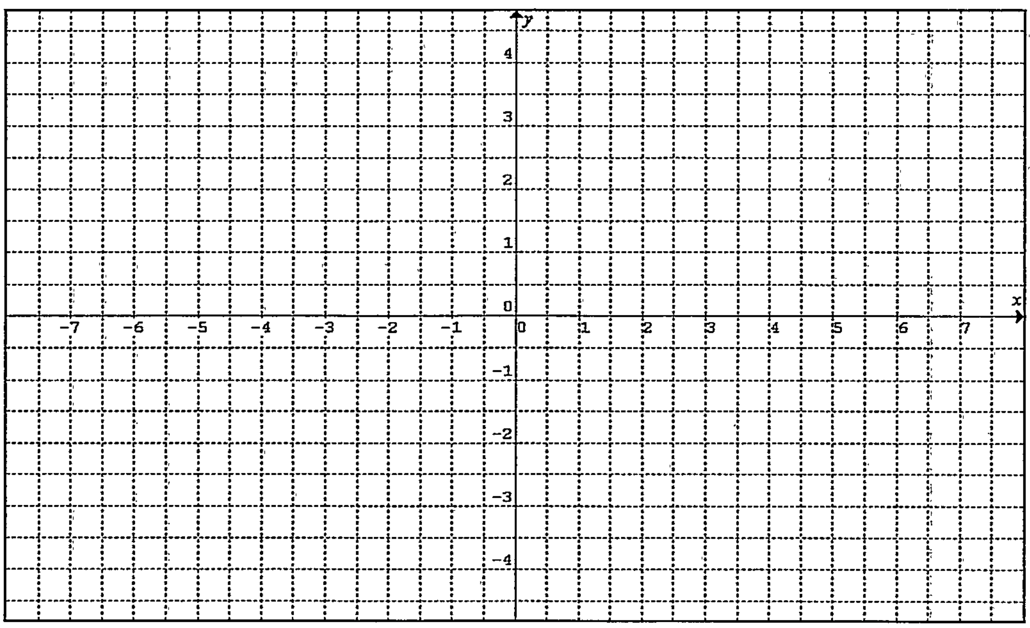


4º Encuentre los interceptos con los ejes coordenados

¿Recuerda lo que pasaba con la gráfica de la función $f(x) = x$ cuando se multiplicó la imagen por -1, es decir cuando se la expresó como $f(x) = -x$?

¿Qué pasará con la gráfica de la función $f(x) = |x|$, si sus imágenes se multiplican por -1; es decir, como sería la gráfica de $f(x) = -|x|$?

Grafique las funciones $f(x) = |x|$ y $f(x) = -|x|$ en el mismo plano cartesiano



Grafique las siguientes funciones:

1. $f(x) = -|x| + 2$

2. $g(x) = -|x+2| - 1$

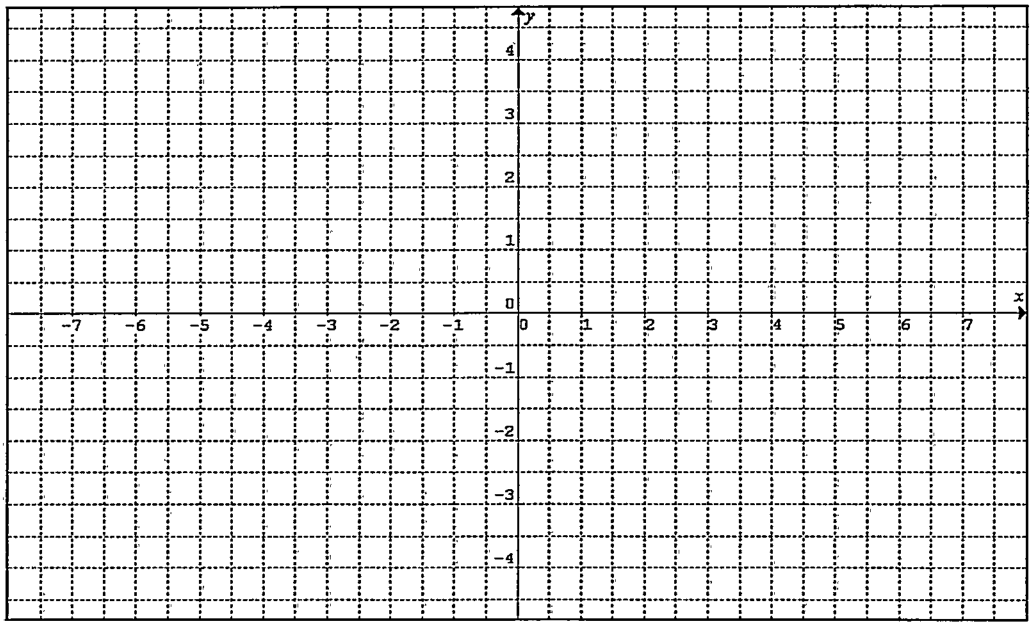
3. $h(x) = -|-x+4| + 2.5$

4. $z(x) = 3 - |x+1|$

5. $F(x) = -1 - |x-5|$

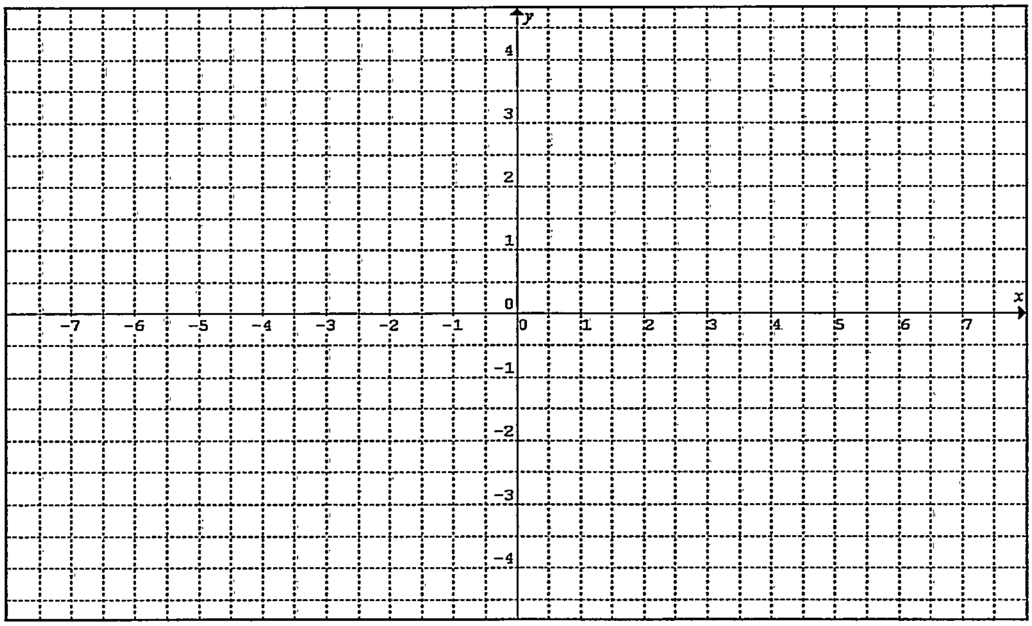
6. $G(x) = \frac{1}{2} - \left|-\frac{3}{2} - x\right|$

3º Grafique $f(x) = -|x| + 2$

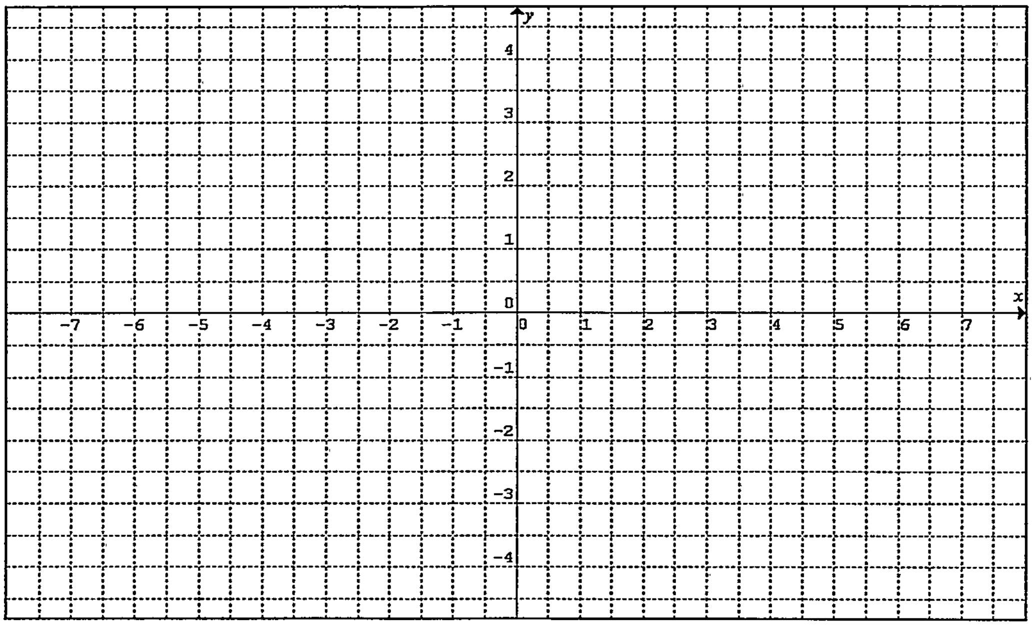


4º Encuentre los interceptos con los ejes coordenados

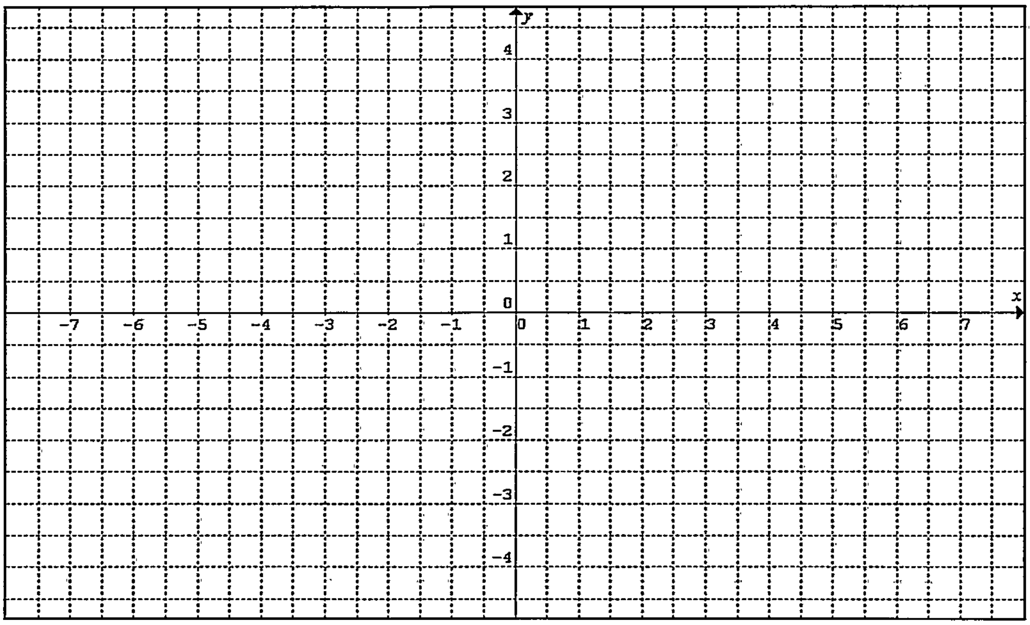
2º Grafique $g(x) = |x + 2|$



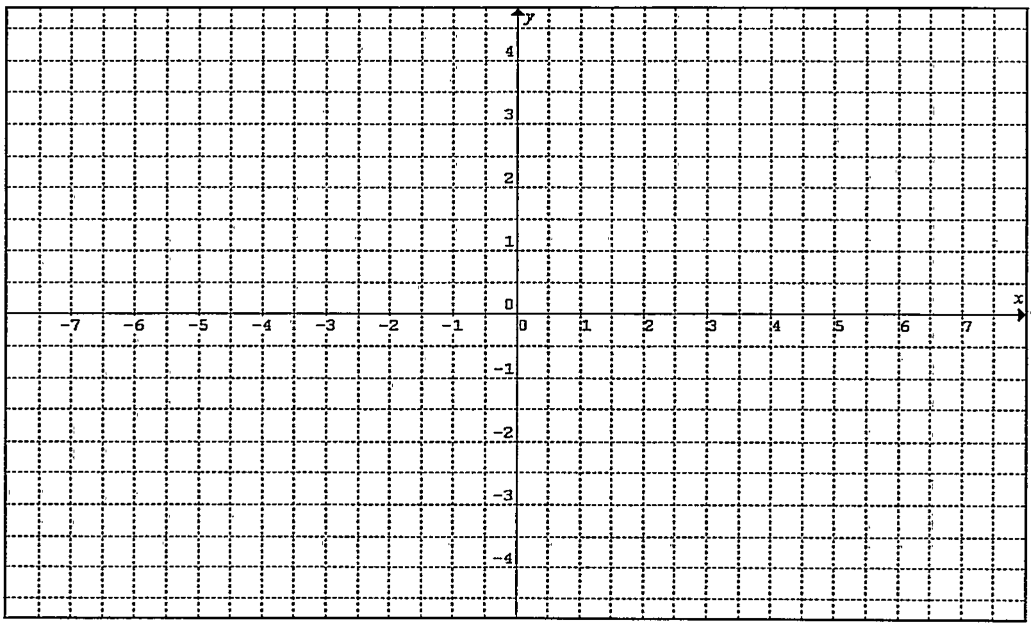
3º Grafique $g(x) = -|x + 2|$



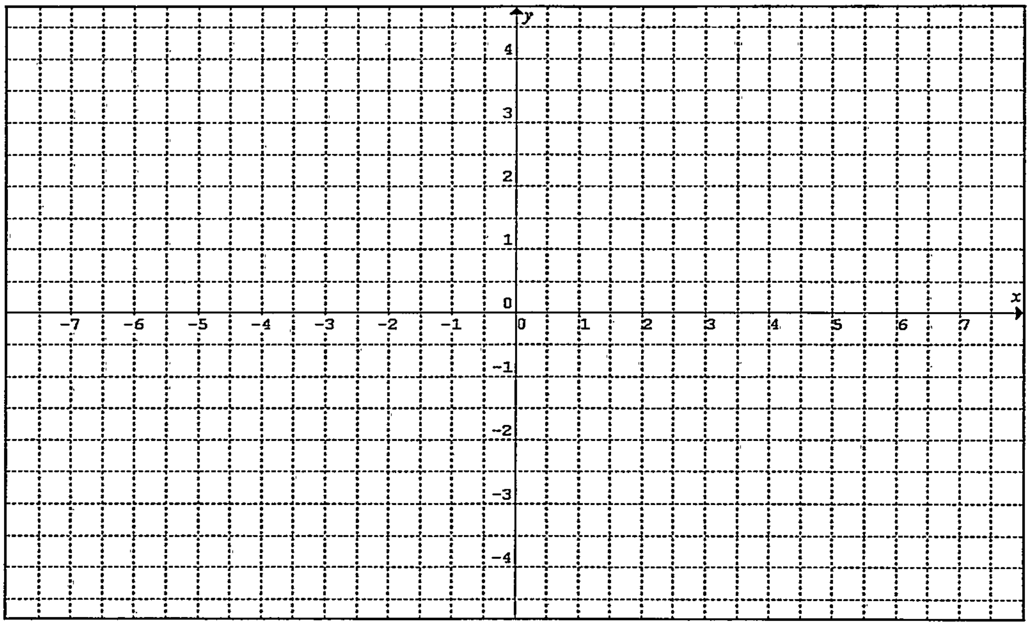
6º Dibuje la gráfica de la función $g(x) = -|x+2|-1$ tomando en cuenta los interceptos con los ejes coordenados. (Gráfica más exacta)



1º Grafique $h(x) = |x|$

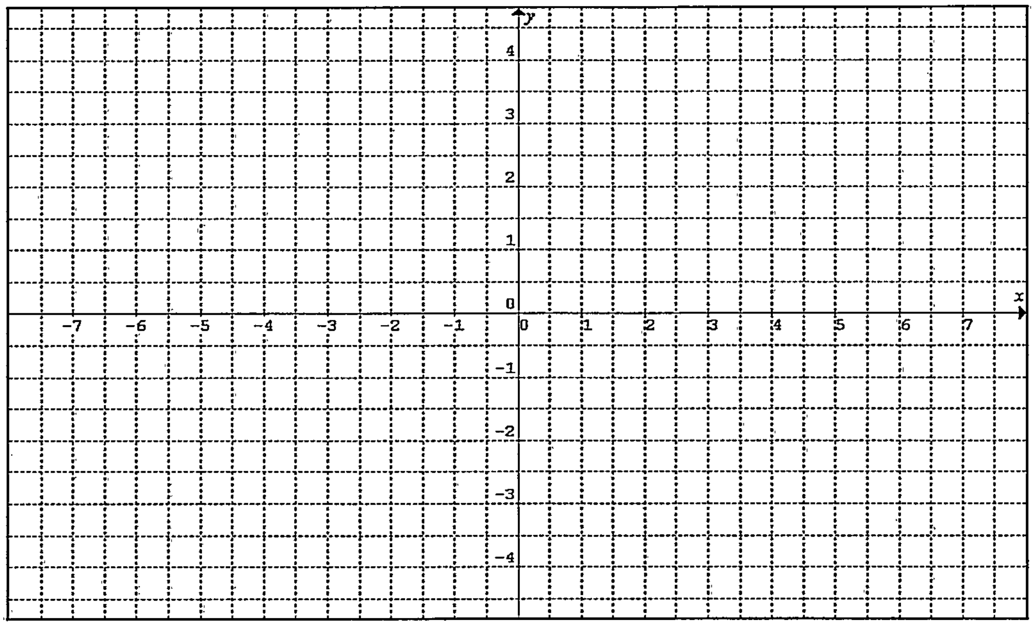


4º Grafique $h(x) = -|-x+4| + 2.5$

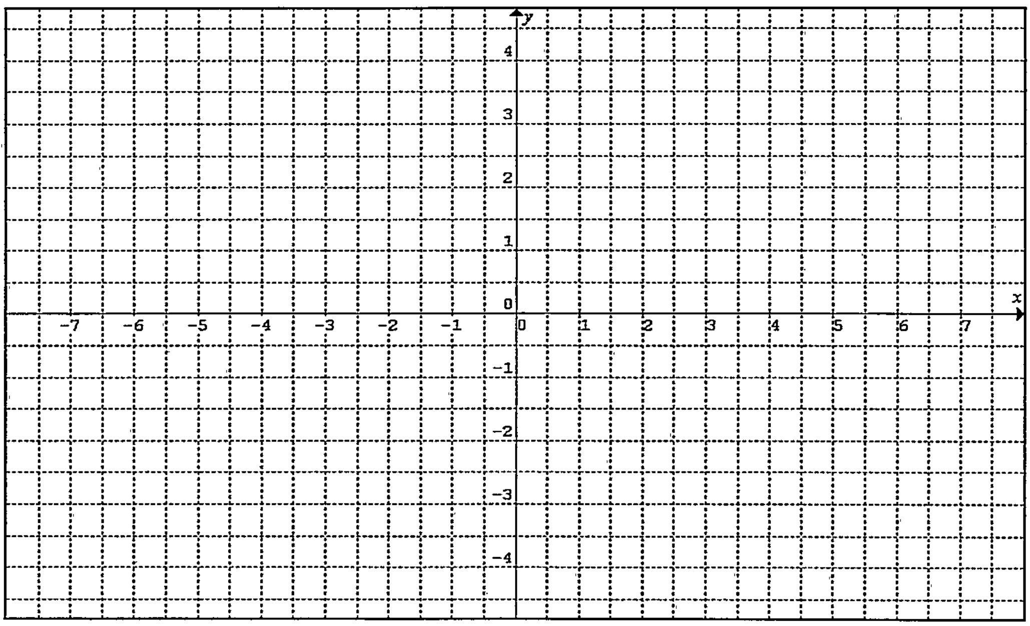


5º Encuentre los interceptos con los ejes coordenados

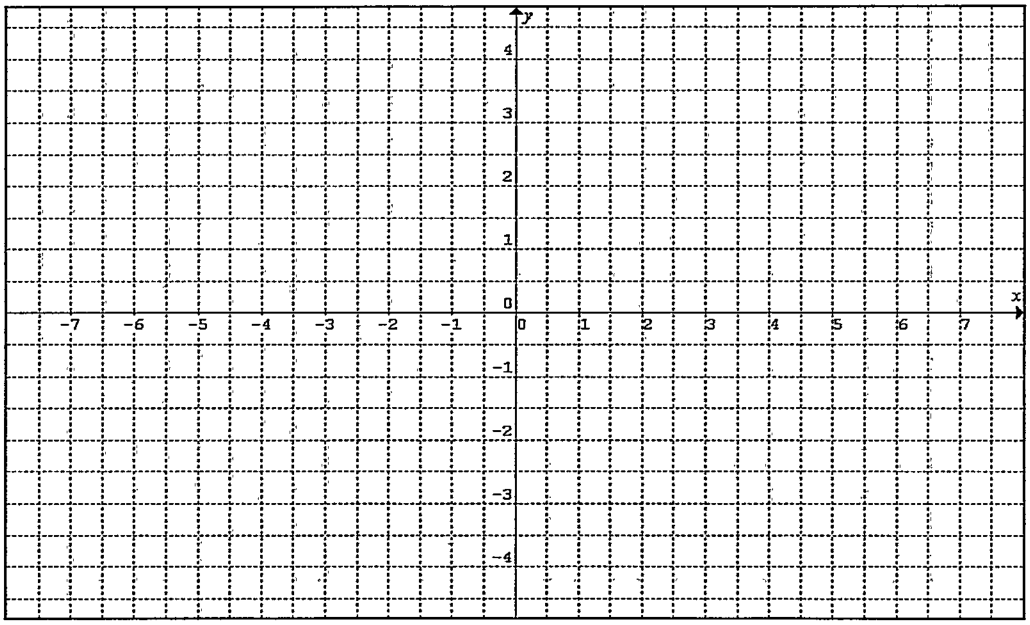
2º Grafique $z(x)=|x+1|$



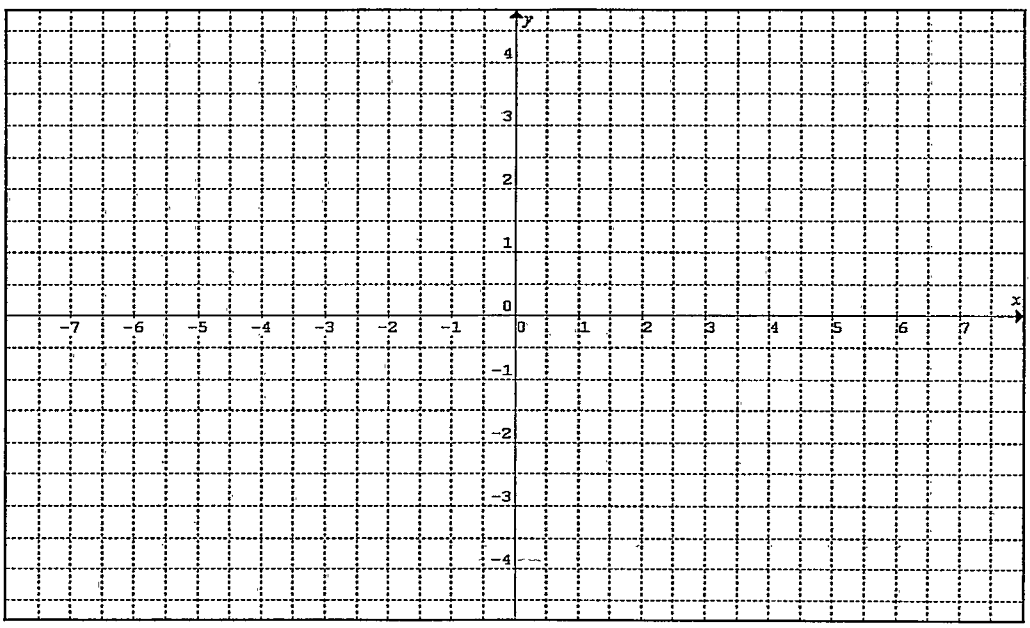
3º Grafique $z(x)=-|x+1|$



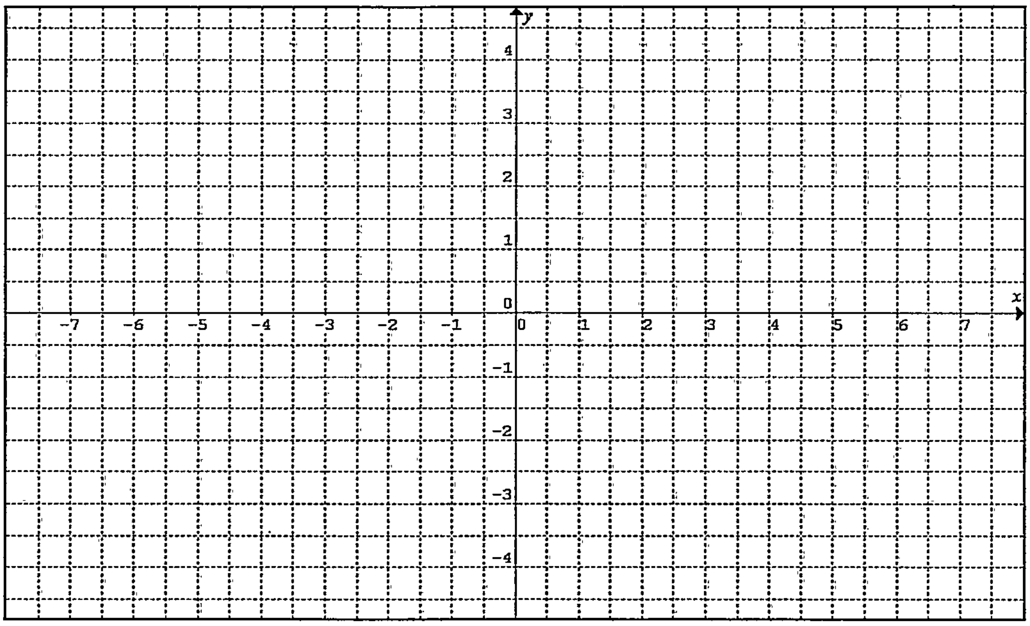
6° Dibuje la gráfica de la función $z(x) = 3 - |x+1|$ tomando en cuenta los interceptos con los ejes coordenados. (Gráfica más exacta)



1° Grafique $F(x) = |x|$

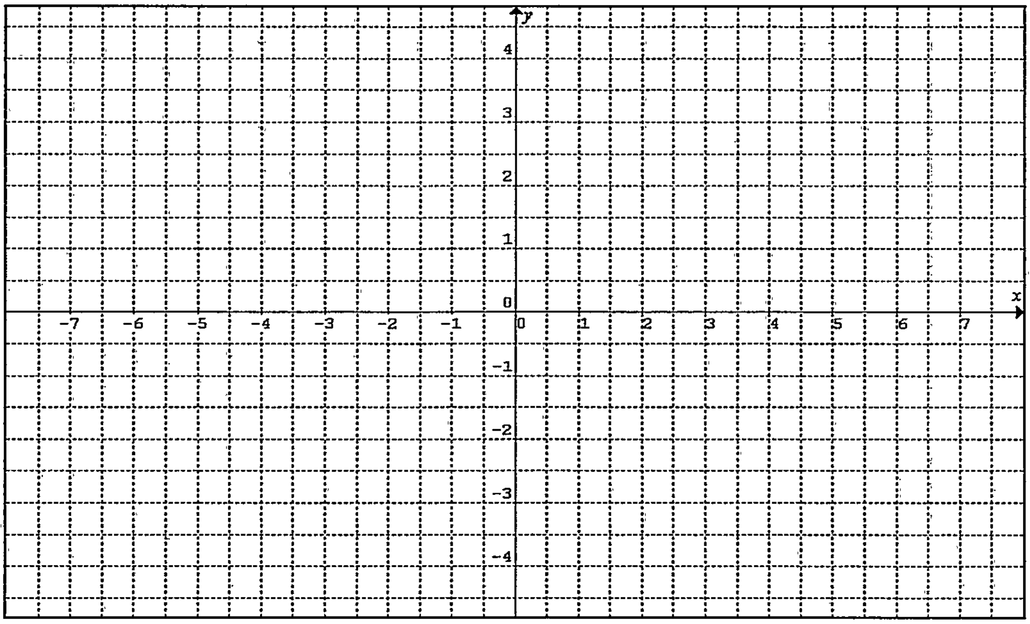


4° Grafique $F(x) = -1 - |x - 5|$

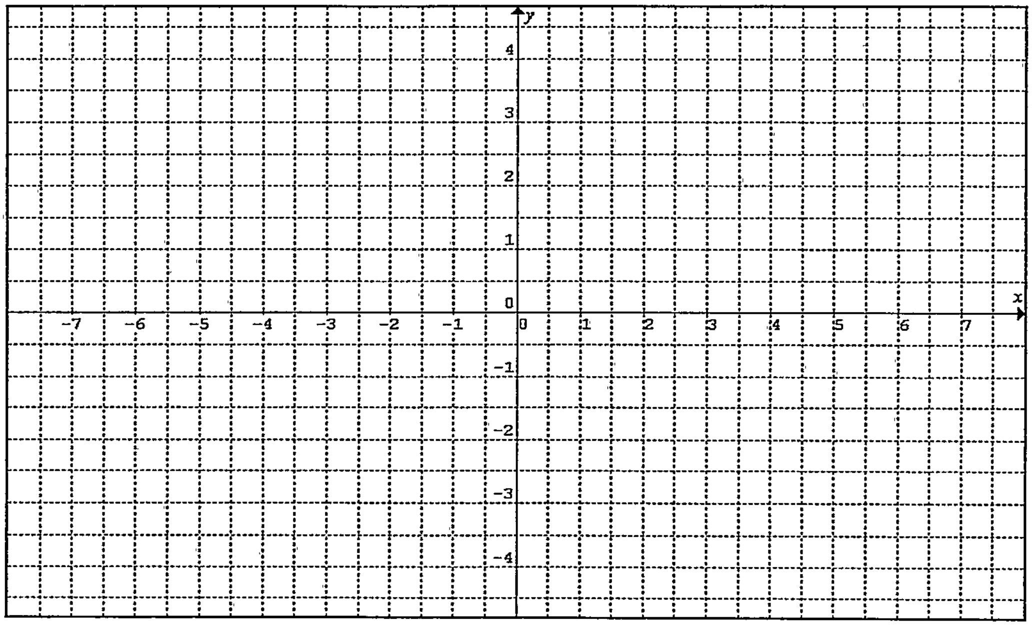


5° Encuentre los interceptos con los ejes coordenados

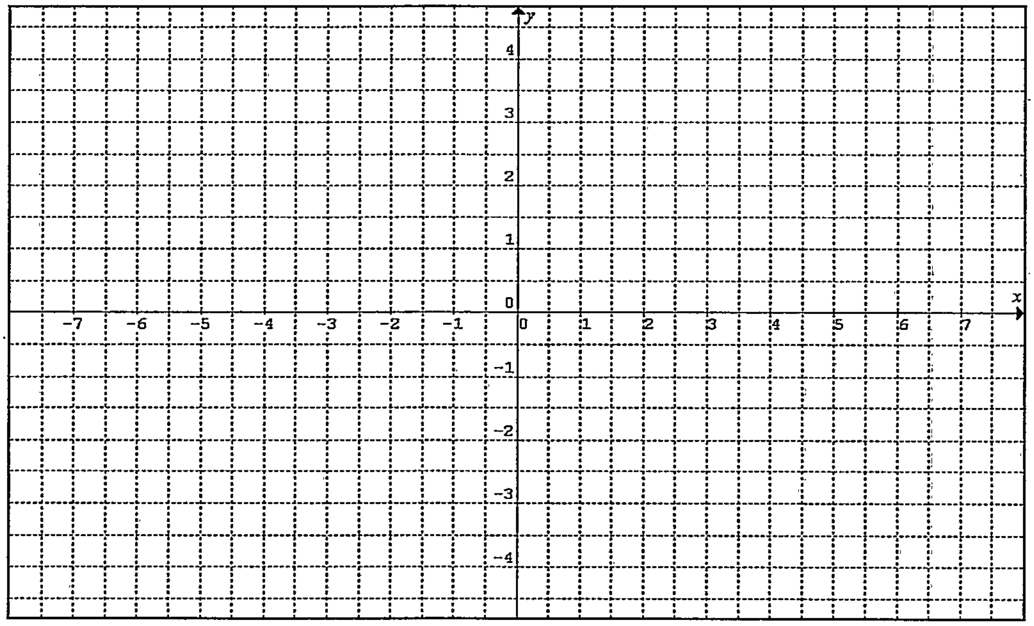
2º Grafique $G(x) = \left| -\frac{3}{2} - x \right|$



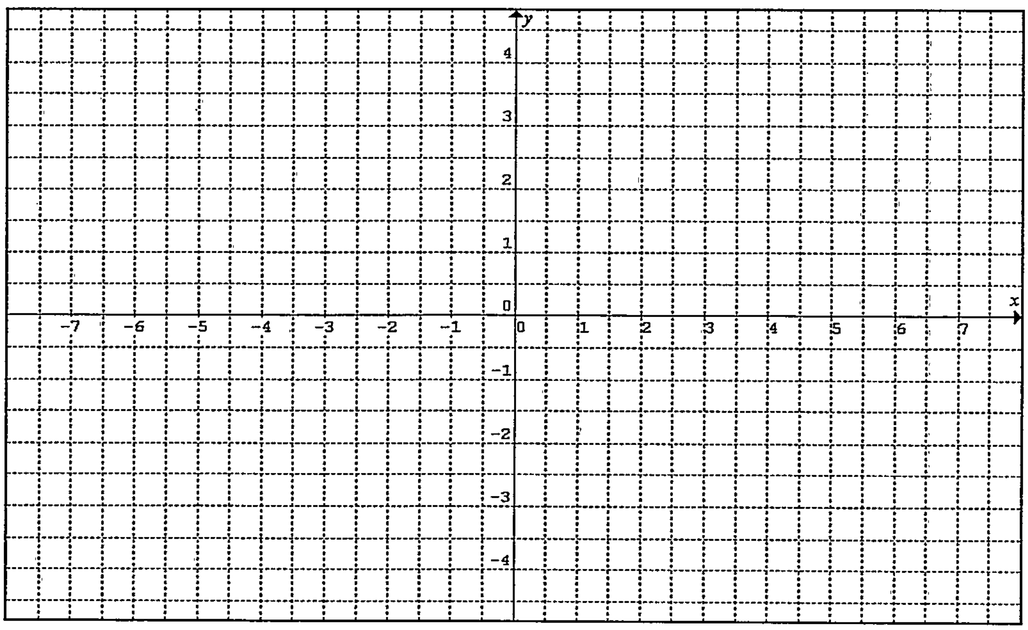
3º Grafique $G(x) = -\left| -\frac{3}{2} - x \right|$



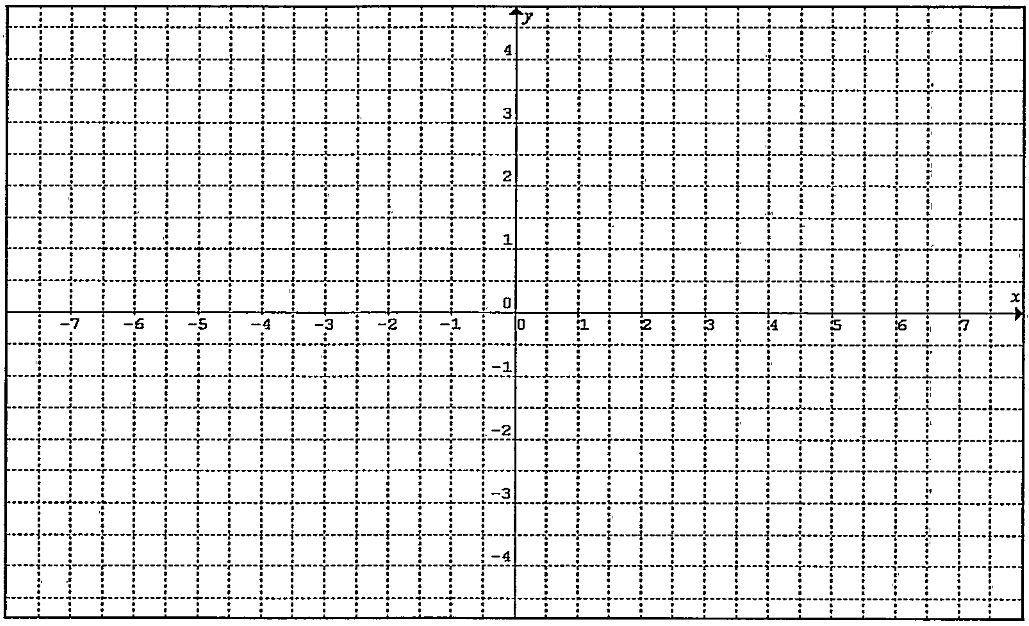
4° Grafique $f(x) = ||x-3|-3|$



5° Grafique $f(x) = -||x-3|-3|$

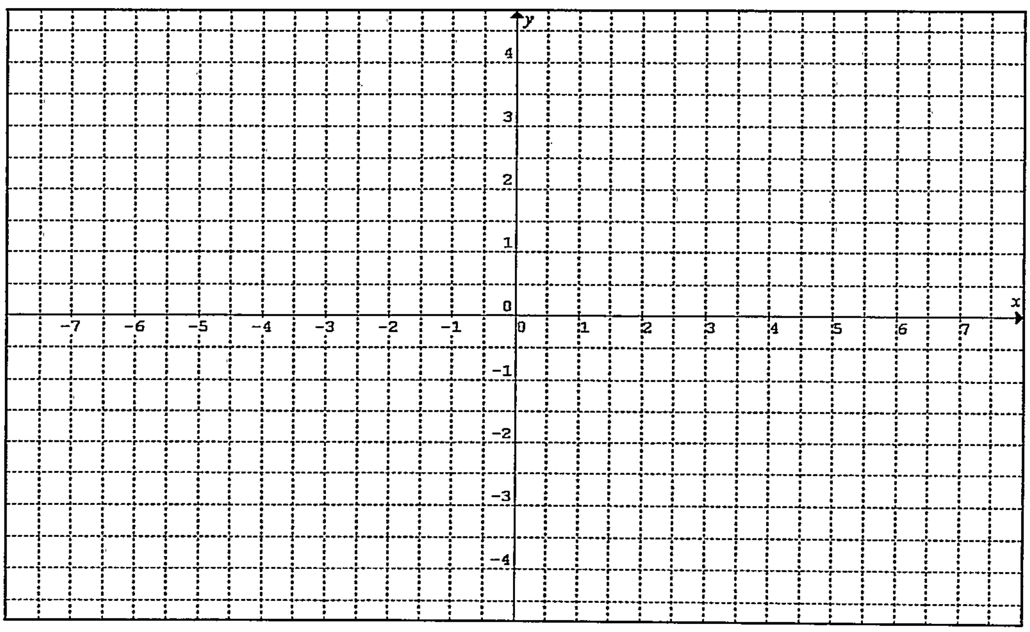


6° Dibuje la gráfica de la función $G(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}|-4-x|$ tomando en cuenta los interceptos con los ejes coordenados. (Gráfica más exacta)

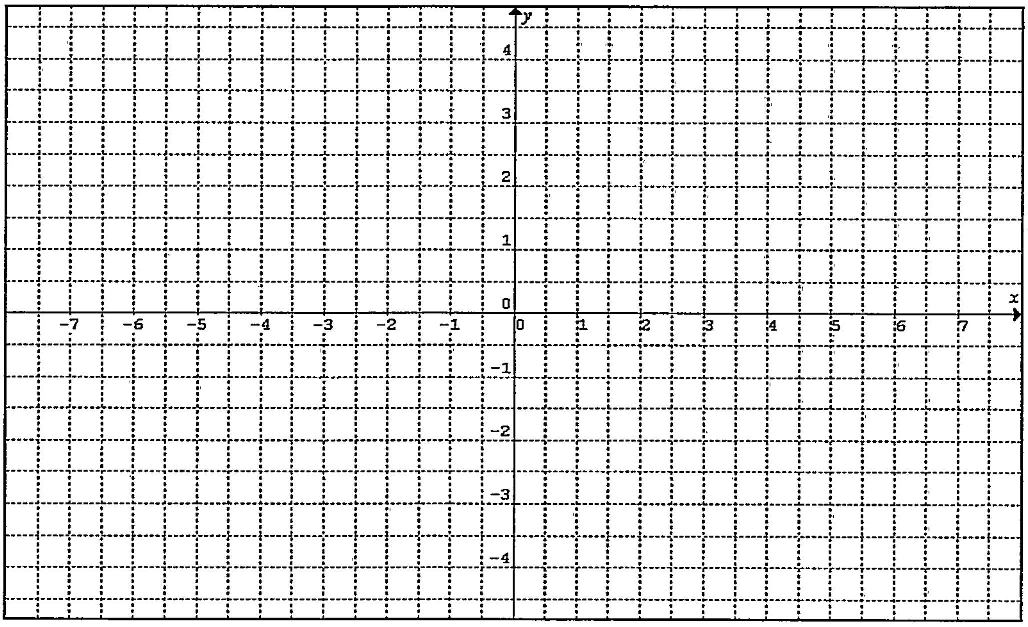


Grafique la función $f(x)=-||x-3|-3|+1$

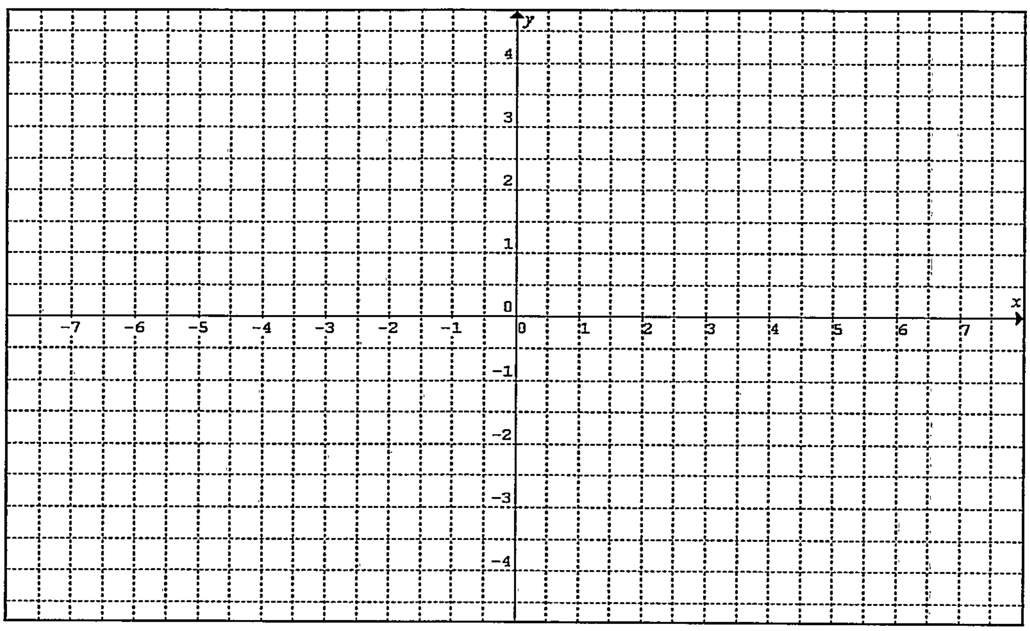
1° Grafique $f(x)=|x|$



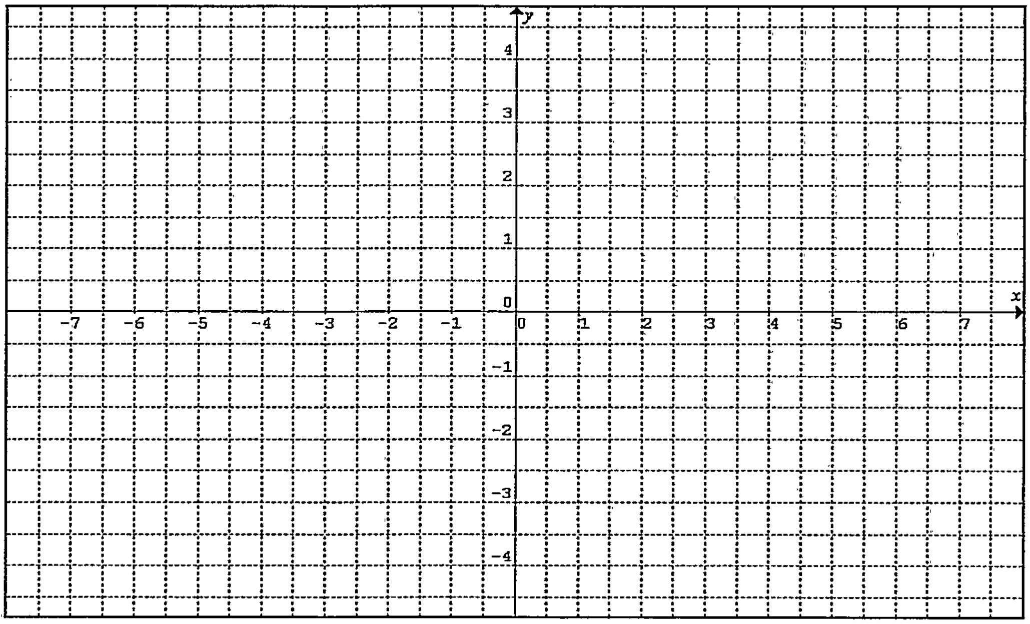
2º Grafique $G(x) = |-4 - x|$



3º Grafique $G(x) = -\frac{1}{2}|-4 - x|$

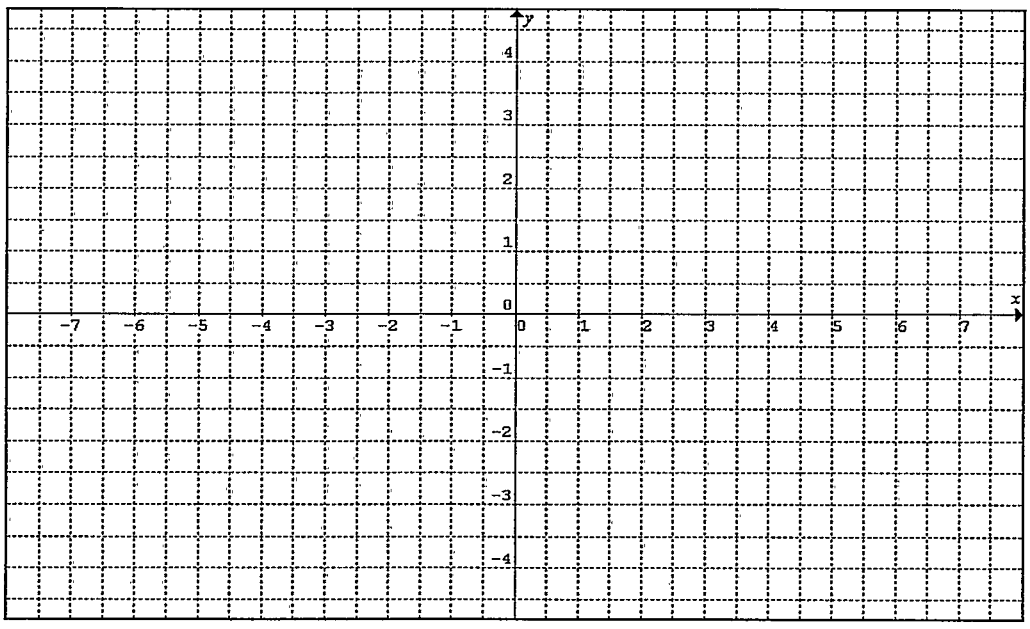


4° Grafique $F(x) = -2 - 4|x-5|$

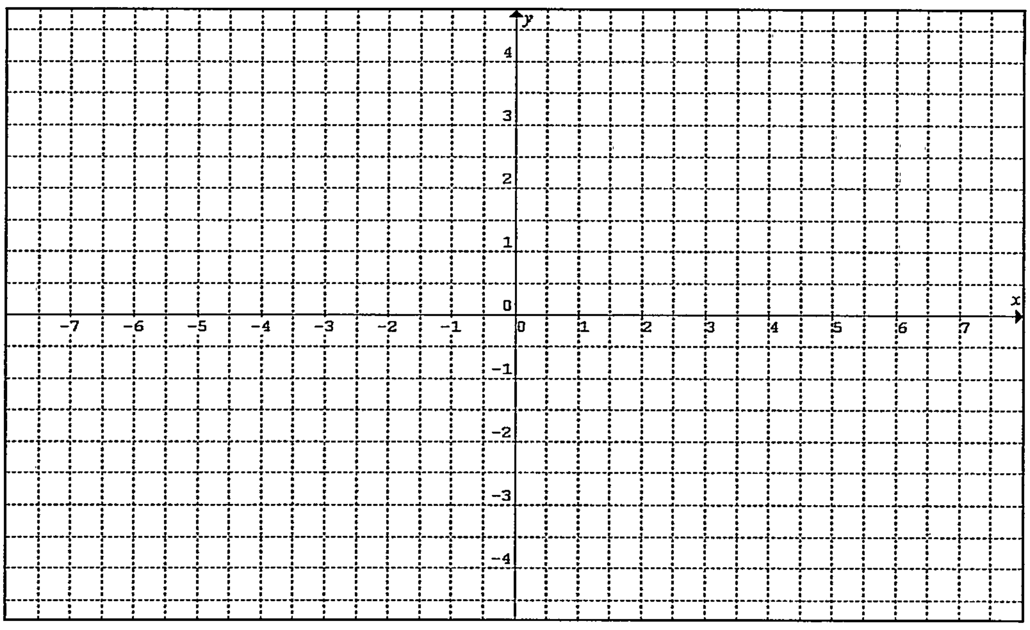


5° Encuentre los interceptos con los ejes coordenados

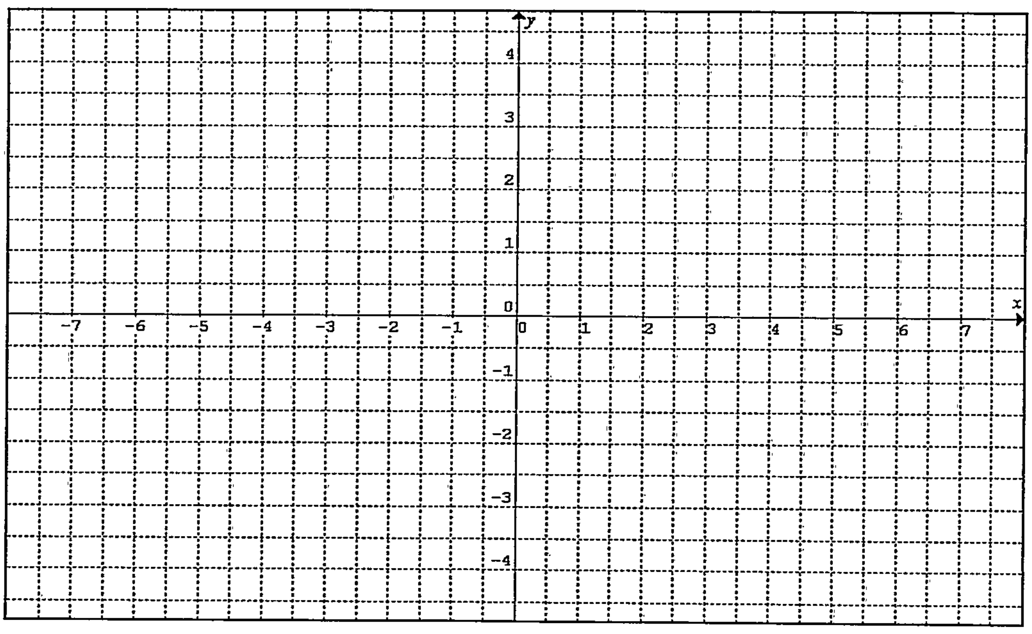
6° Dibuje la gráfica de la función $z(x)=2+\frac{5}{2}|x-1|$ tomando en cuenta los interceptos con los ejes coordenados. (Gráfica más exacta)



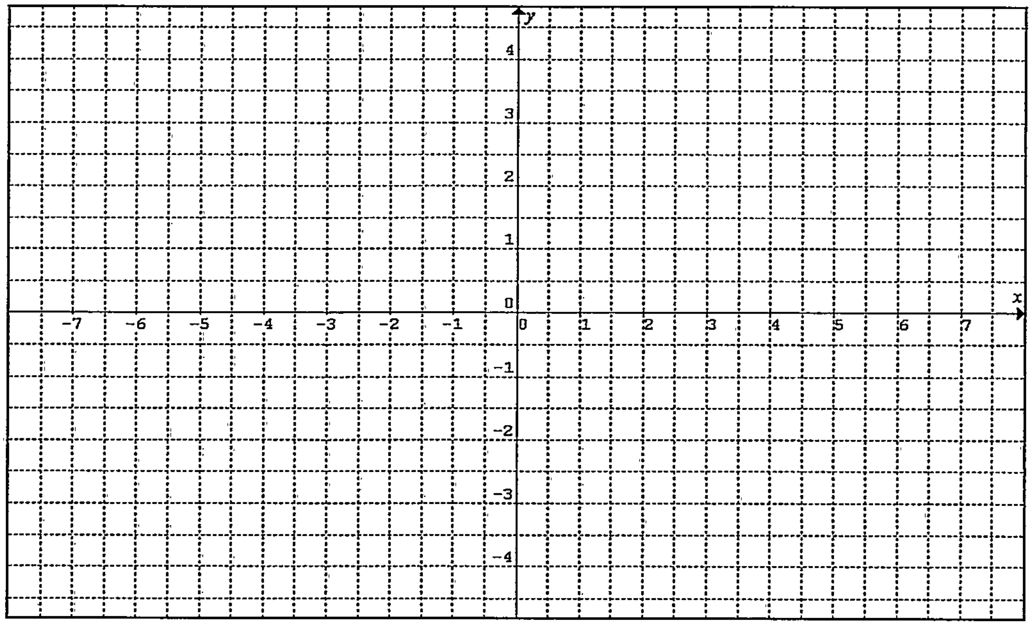
1° Grafique $F(x)=|x|$



3° Grafique $z(x)=\frac{5}{2}|x-1|$

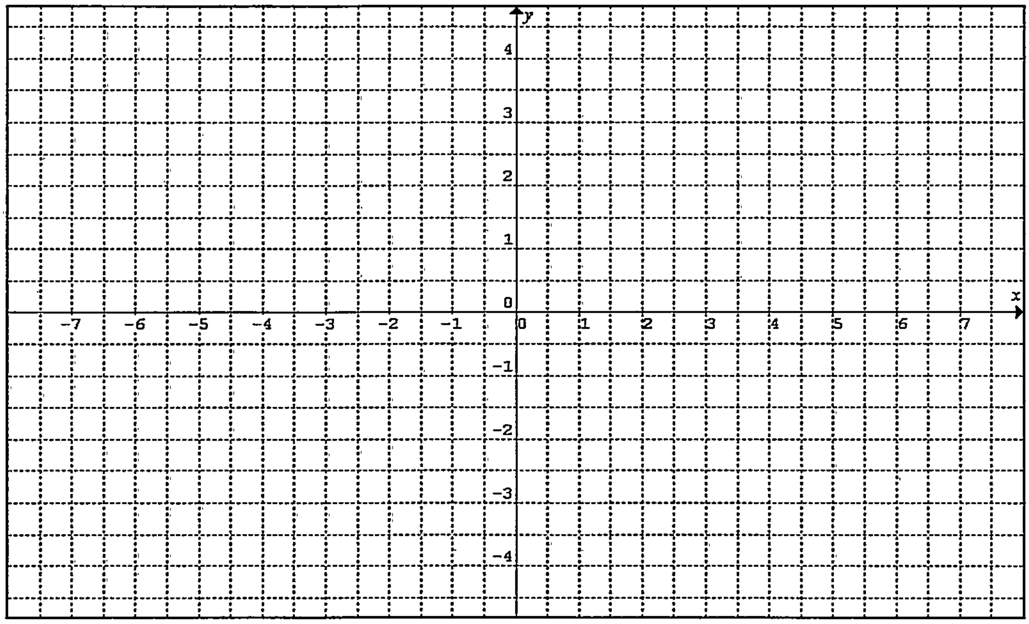


4° Grafique $h(x) = 3|-x+1| + 0.5$

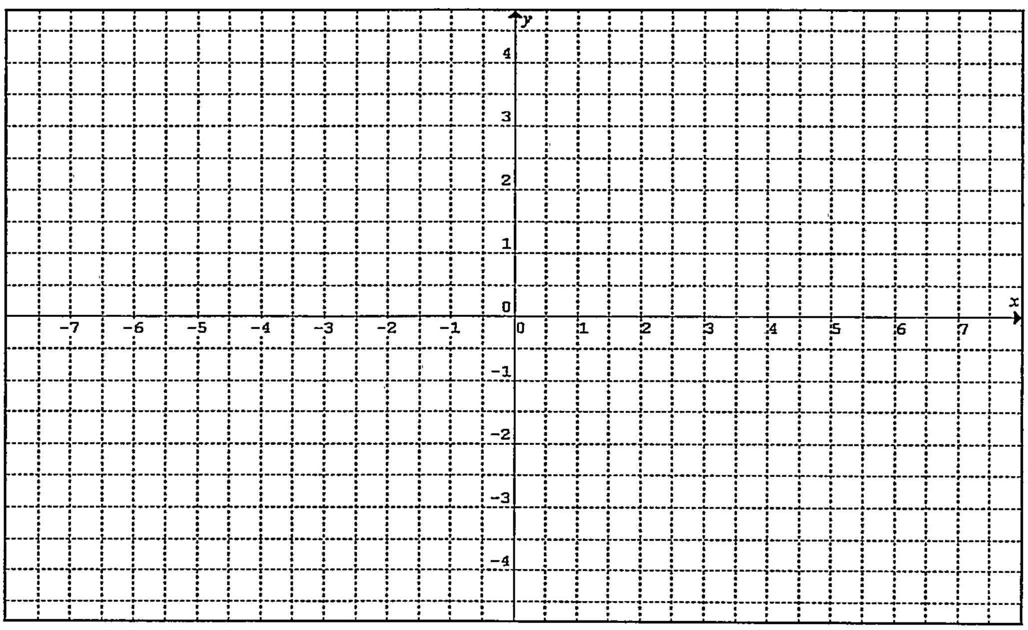


5° Encuentre los interceptos con los ejes coordenados

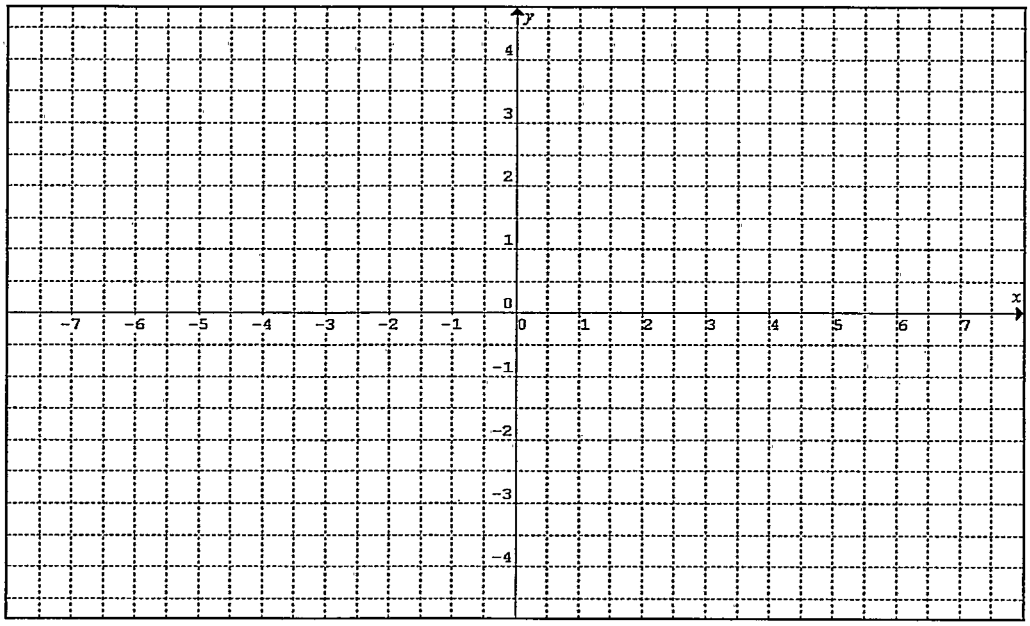
6º Dibuje la gráfica de la función $g(x) = -\frac{2}{3}|x+3| - 1$ tomando en cuenta los interceptos con los ejes coordenados. (Gráfica más exacta)



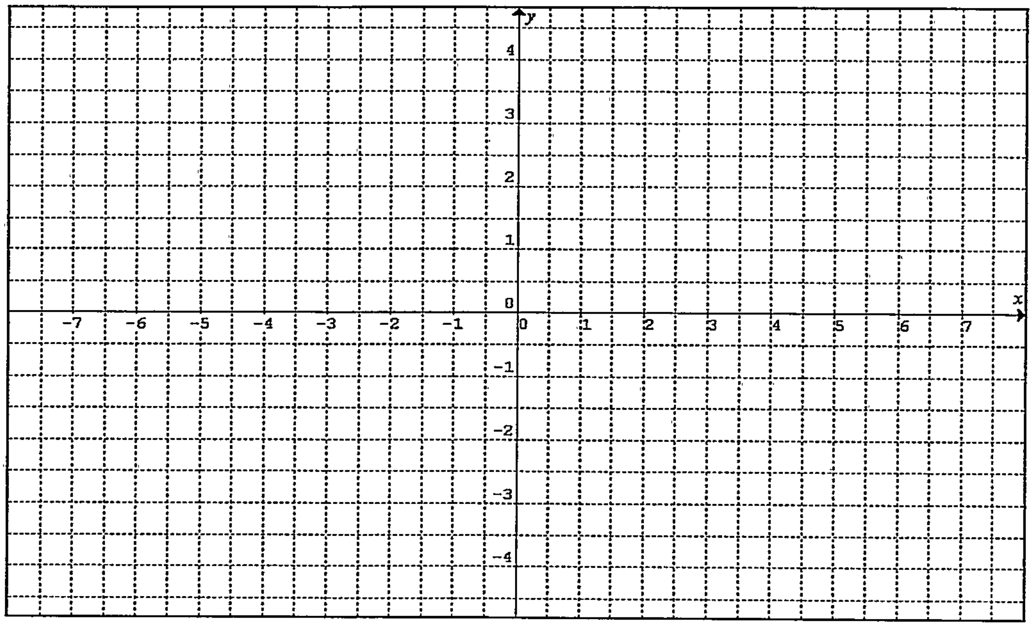
1º Grafique $h(x) = |x|$



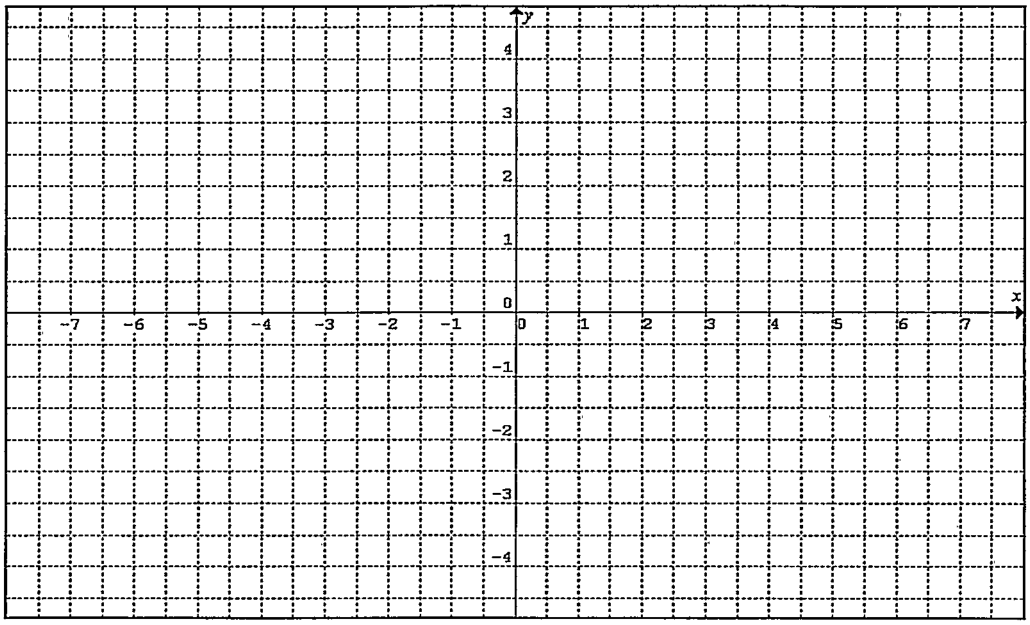
2º Grafique $g(x) = |x+3|$



3º Grafique $g(x) = -\frac{2}{3}|x+3|$



3° Grafique $f(x) = 2|x| - 1$



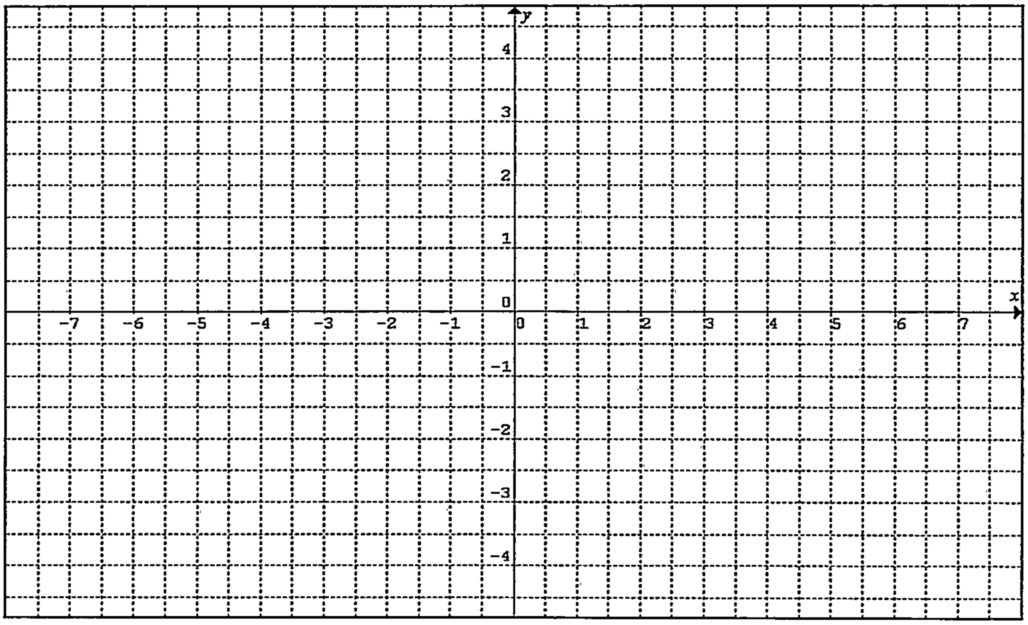
4° Encuentre los interceptos con los ejes coordenados

¿Qué diferencia hay entre las gráficas de la función *f* y las funciones *g*, *h* y *z*?

____

Grafique en el mismo plano cartesiano las siguientes funciones:

$F(x)=|x|$; $G(x)=\frac{1}{2}|x|$; $H(x)=\frac{1}{3}|x|$; $Z(x)=\frac{1}{4}|x|$



¿Qué diferencia hay entre las gráficas de la función *F* y las funciones *G*, *H* y *Z*?

____

¿Cuál sería la forma general que represente cualquiera de esas funciones?

$f(x)=$ ________

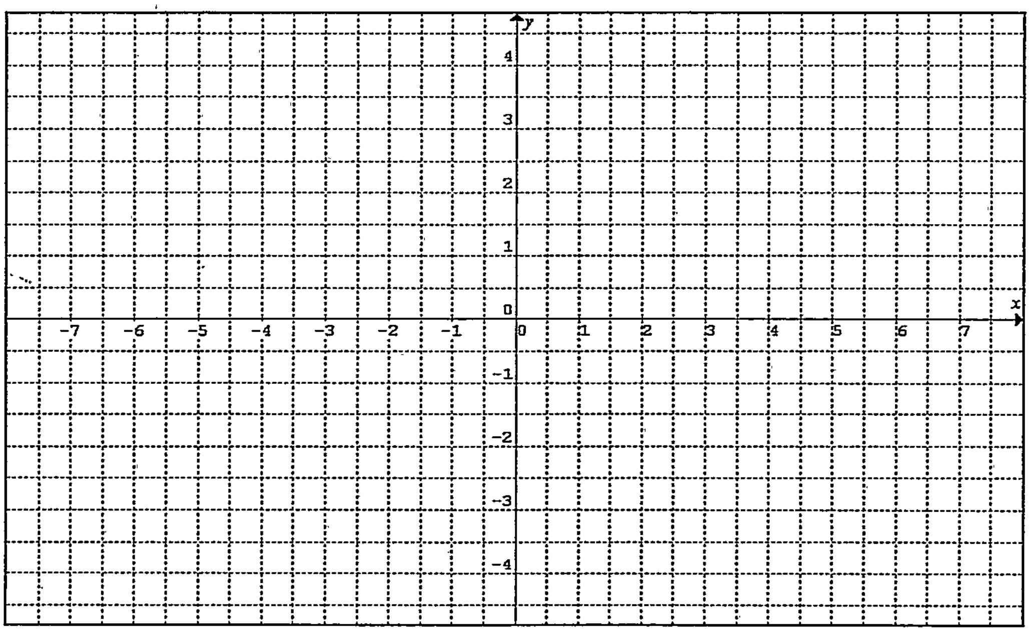
Grafique las funciones siguientes:

a. $f(x)=2|x|-1$

b. $g(x)=-\frac{2}{3}|x+3|-2$

c. $h(x)=3|-x+1|+0.5$

6º Grafique $f(x) = -||x-3|-3|+1$



7º Encuentre los interceptos de la función $f(x) = -||x-3|-3|+1$ con los ejes coordenados

Complete correctamente:

Si se le suma ***d*** al dominio, la gráfica se traslada hacia ______________________________

Cuando se resta ***d*** al dominio y se suma ***b*** a la imagen la gráfica se traslada ________

____

La gráfica gira 180º cuando se ____

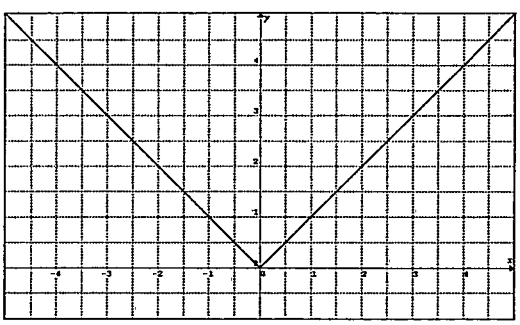
La gráfica se cierra con respecto al eje y cuando _____________________________________

____

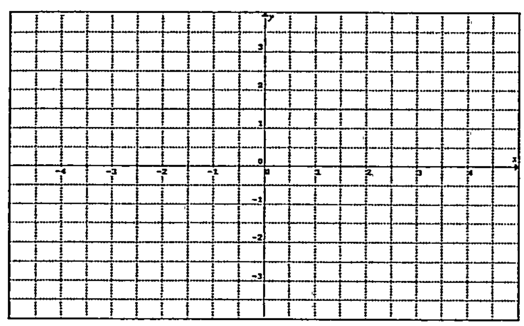
Al sacar el valor absoluto a una imagen negativa, entonces _________________________

Bosqueje la gráfica corresponde:

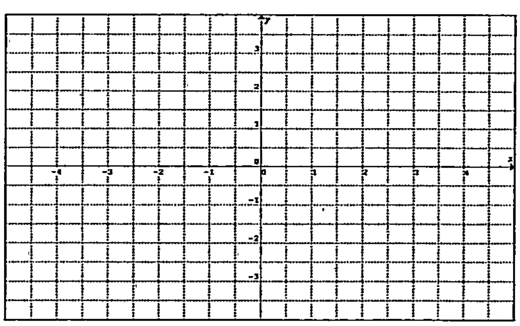
$f(x)=|x|$



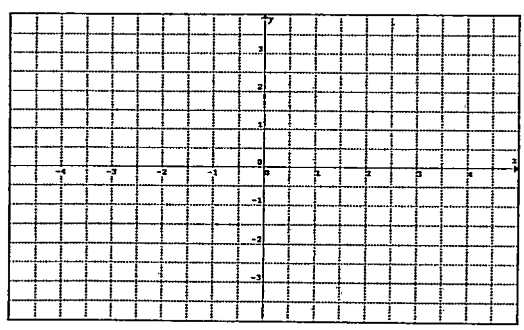
$f(x)=|x+d|$



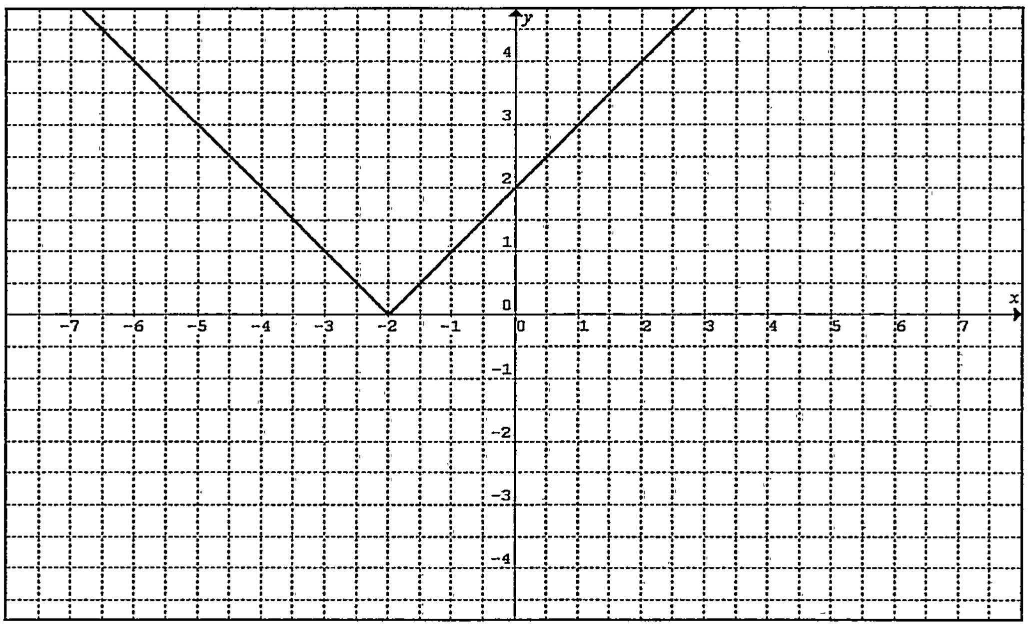
$f(x)=k|x-d|$; $k=-1$



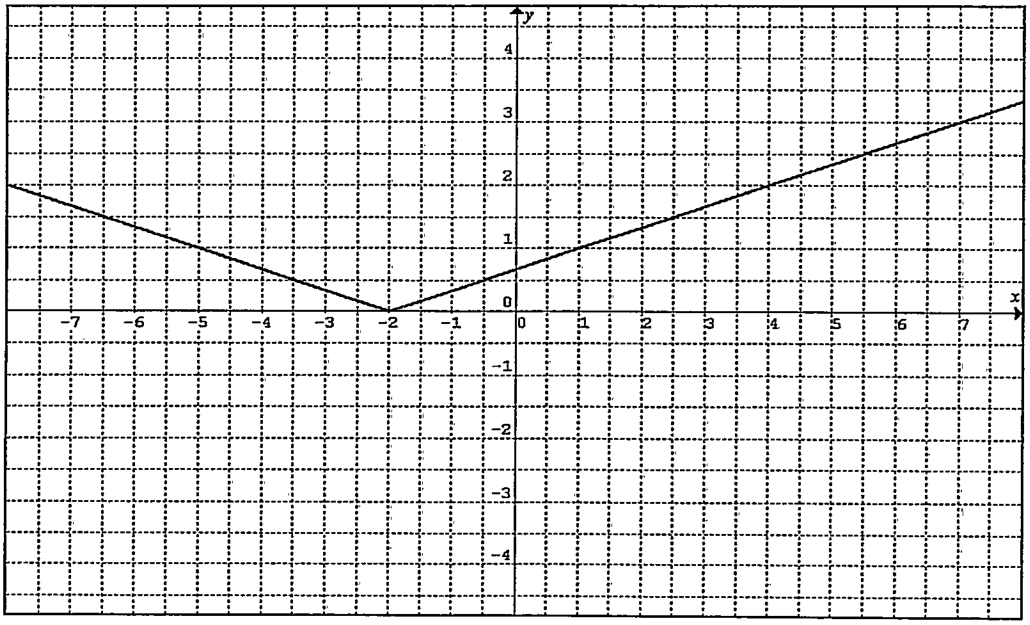
$f(x)=k|x|+b$; $k<-1$



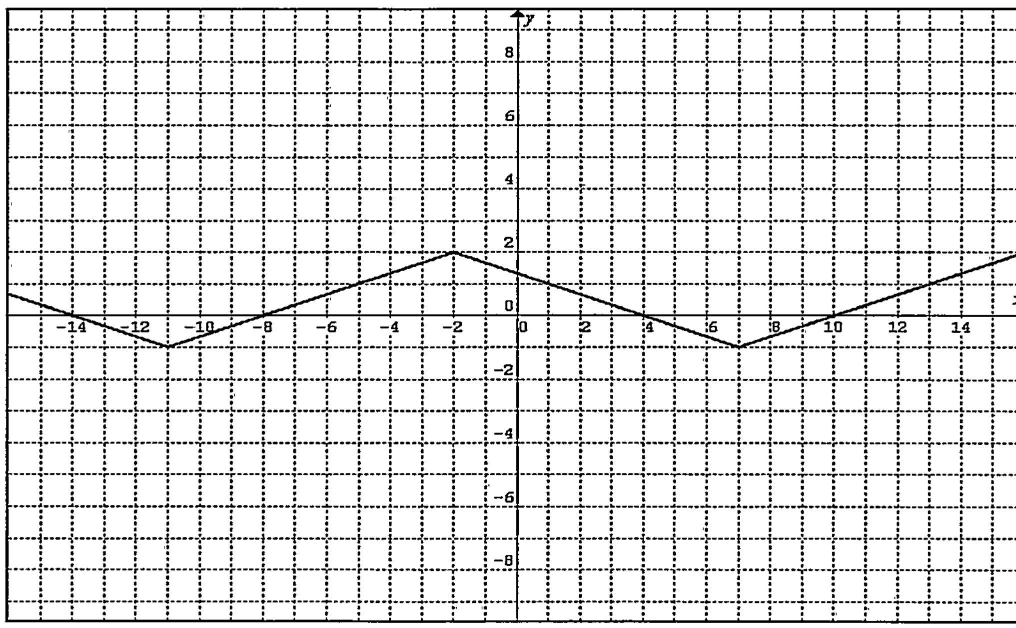
2º ____



3º ____



6º ____



7º ____

$$f(x)=\left|\frac{1}{3}|x+2|-3\right|-1$$

$$I_y:? \Rightarrow x=0$$

$$f(0)=\left|\frac{1}{3}|0+2|-3\right|-1$$

$$f(0)=\left|\frac{2}{3}-3\right|-1$$

$$f(0)=\left|-\frac{7}{3}\right|-1$$

$$f(0)=\frac{7}{3}-1$$

$$f(0)=\frac{4}{3}$$

$$I_y:\left(0,\frac{4}{3}\right)$$

Función cuadrática

Ayuda memoria:

Cualquier número real negativo elevado a una potencia par es igual a un número positivo;

$$(-3)^2 = 9;\ \left(-\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$$

Atención:

$$(-2)^2 = 4$$

$$-(2)^2 = -4$$

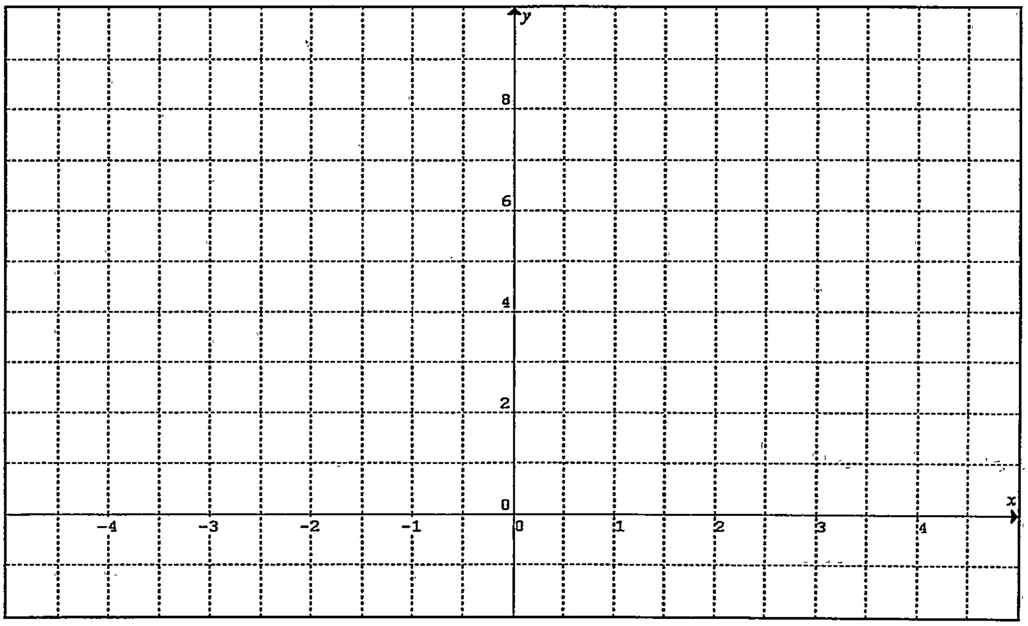
Por lo tanto,

$$(-2)^2 \neq -(2)^2$$

La función cuadrática en la forma más elemental está dada por $f(x) = x^2$.

Su gráfica puede ser representada en el plano cartesiano calculando la siguiente tabla de valores:

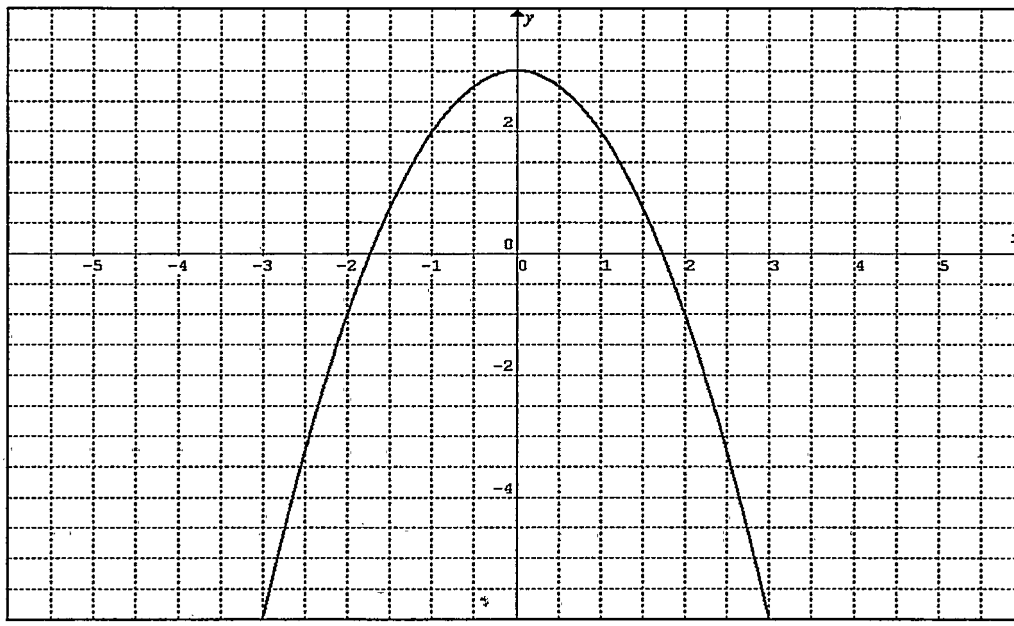
x	-3	-2	-25	-15	-1	0	5	1	15	2	3
y											



¿Existe simetría con respecto a alguna recta?

____

Describa los cambios (traslación y/o rotación) que tiene la gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 3$ mostrada a continuación, con respecto a la función básica $f(x) = x^2$



Traslación horizontal: ____

Traslación vertical: ____

Rotación: ____

¿Existe simetría? ¿con respecto a quién?

____

Calcule:

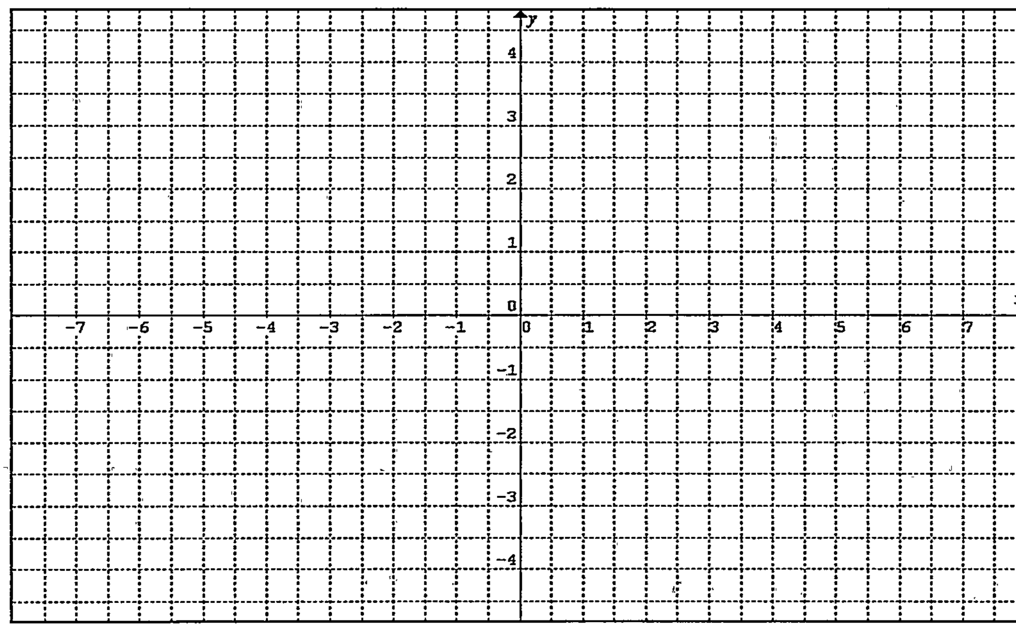
$Dom f =$ ________________

$Rang f =$ ________________

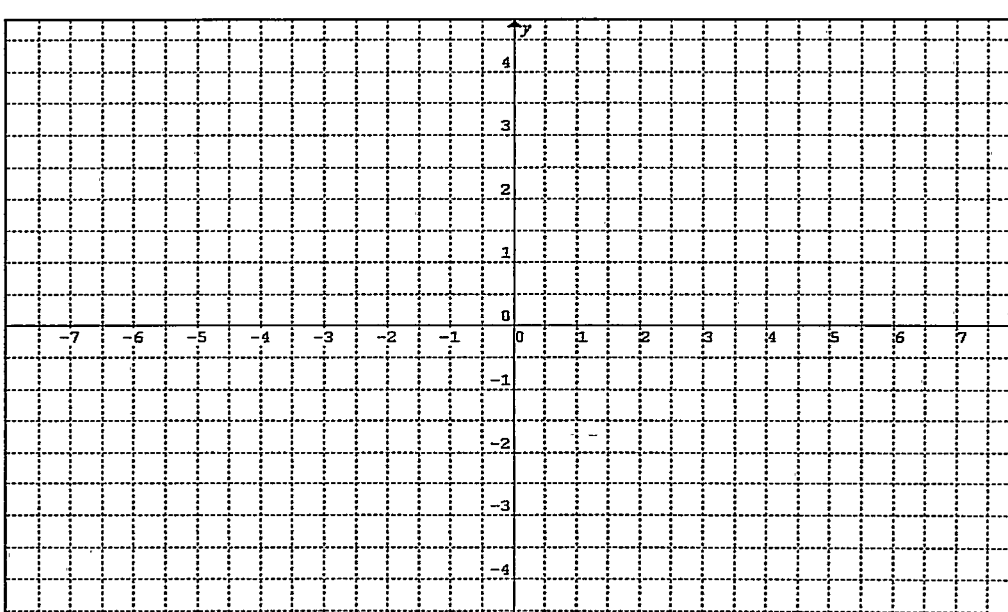
Grafique las siguientes funciones:

a) $f(x)=(x-3)^2+1$

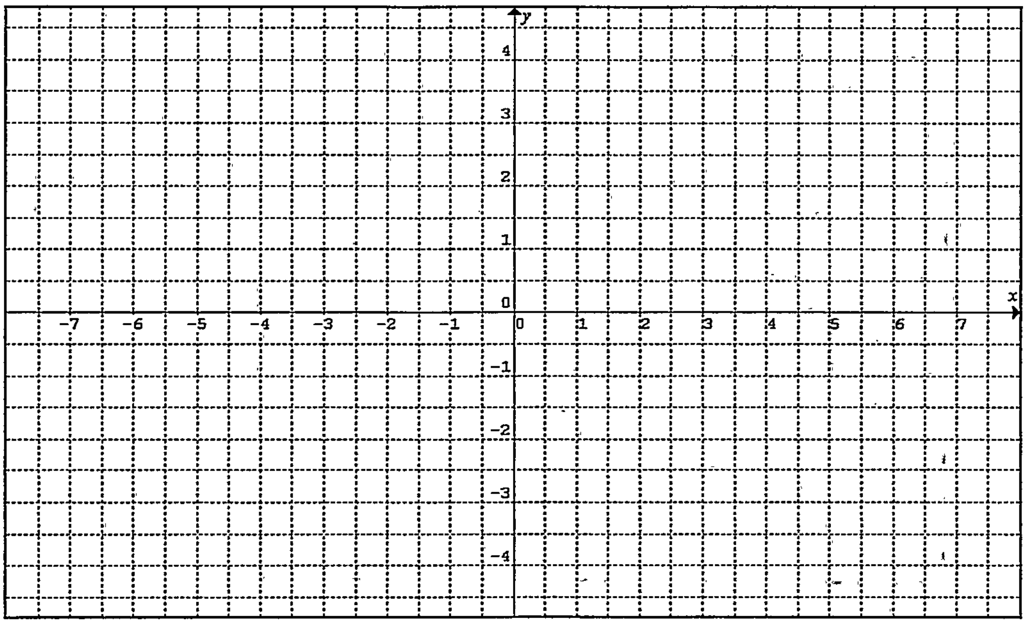
1° Grafique $f(x)=x^2$



2° Grafique $f(x)=(x-3)^2$

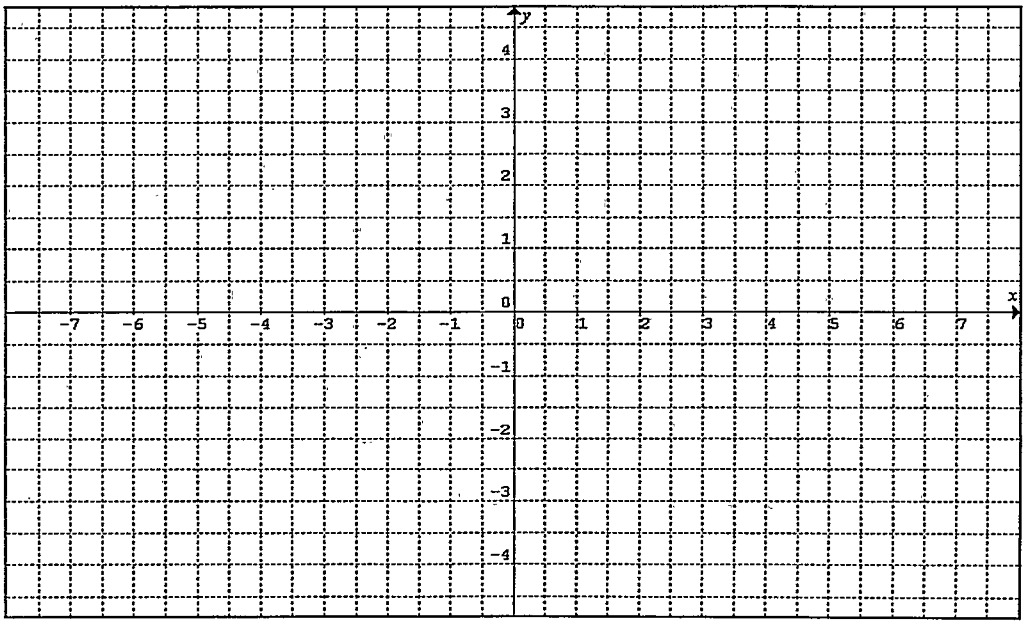


5° Dibuje la gráfica de la función $f(x) = (x-3)^2 + 1$ tomando en cuenta los interceptos con los ejes coordenados. (Gráfica más exacta)



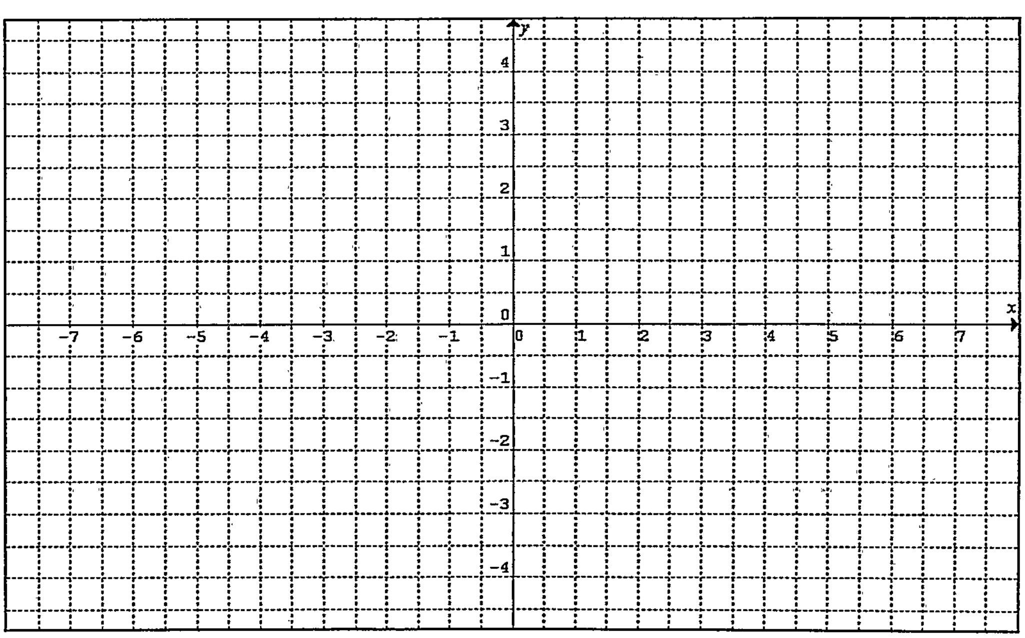
b) $g(x) = (x+2)^2 - 2$

1° Grafique $f(x) = x^2$

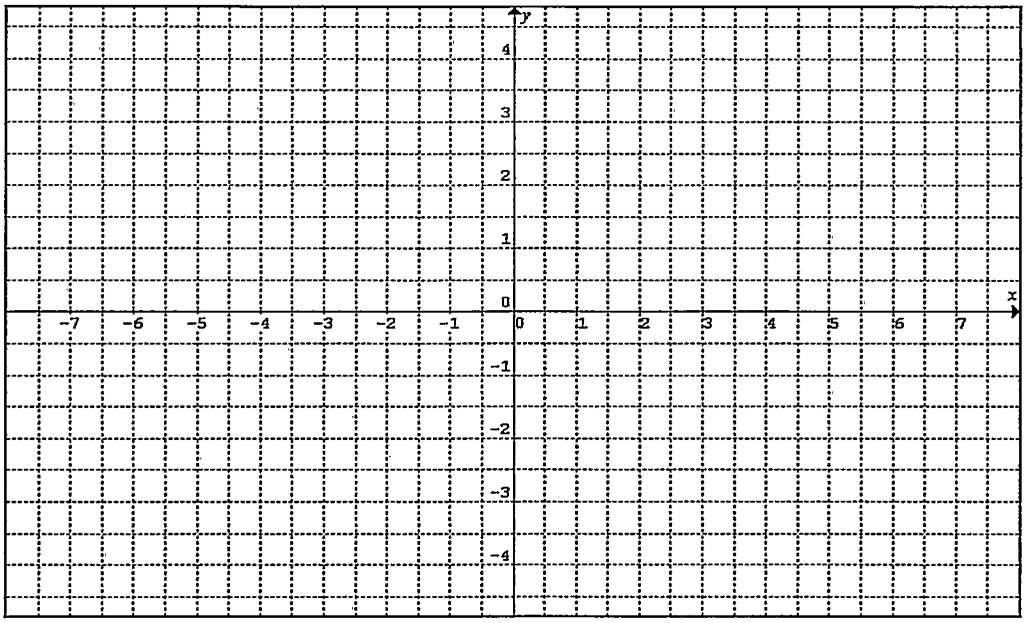


4° Encuentre los interceptos con los ejes coordenados

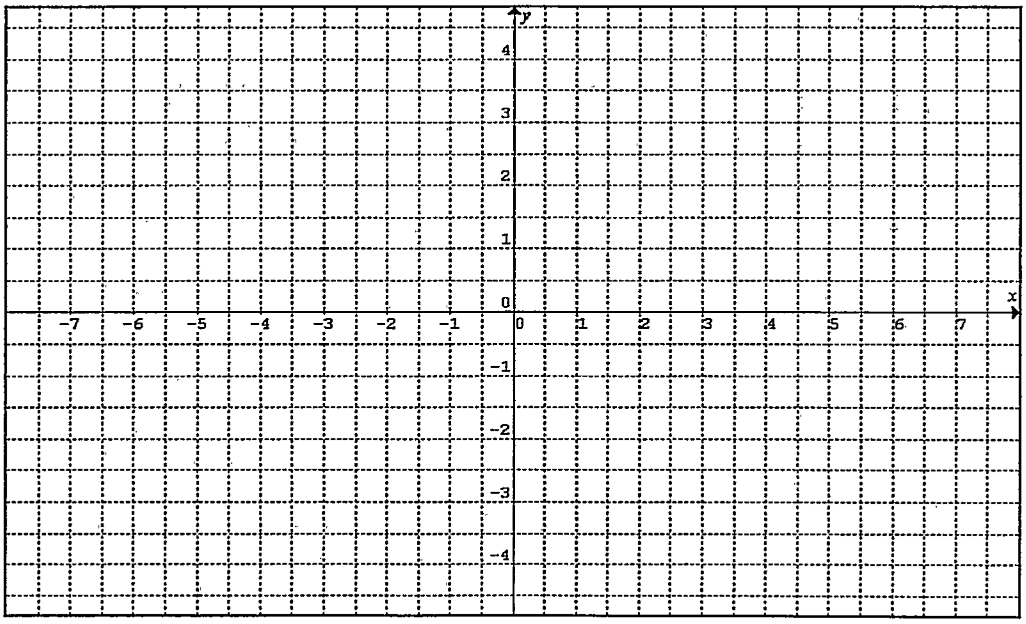
5° Dibuje la gráfica de la función $g(x)=(x+2)^2-2$ tomando en cuenta los interceptos con los ejes coordenados. (Gráfica más exacta)



3º Grafique $h(x) = -(x - 1.5)^2$

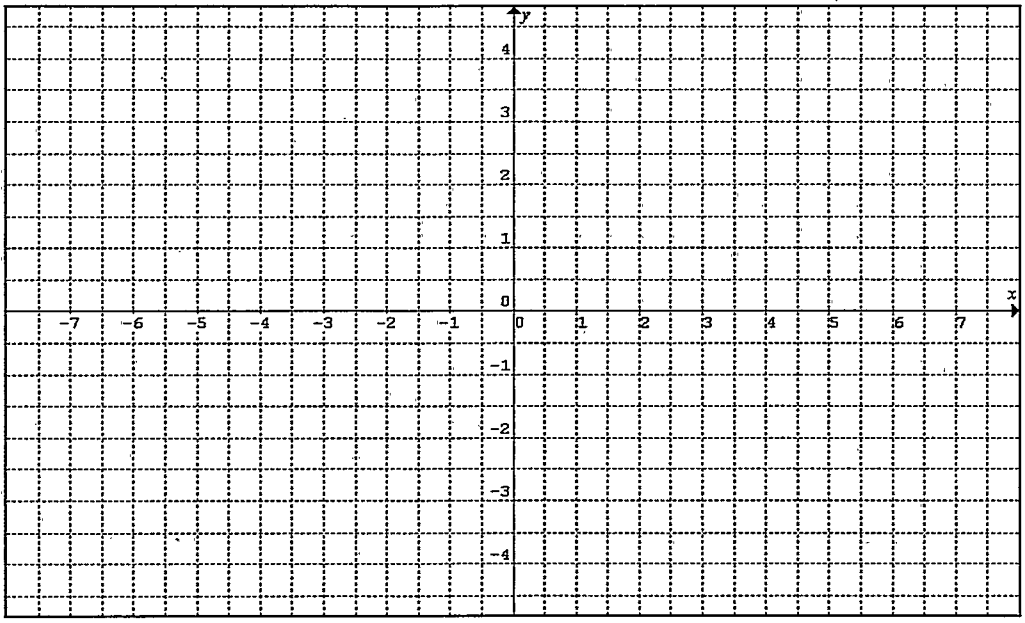


4º Grafique $h(x) = -(x - 1.5)^2 + 2.5$

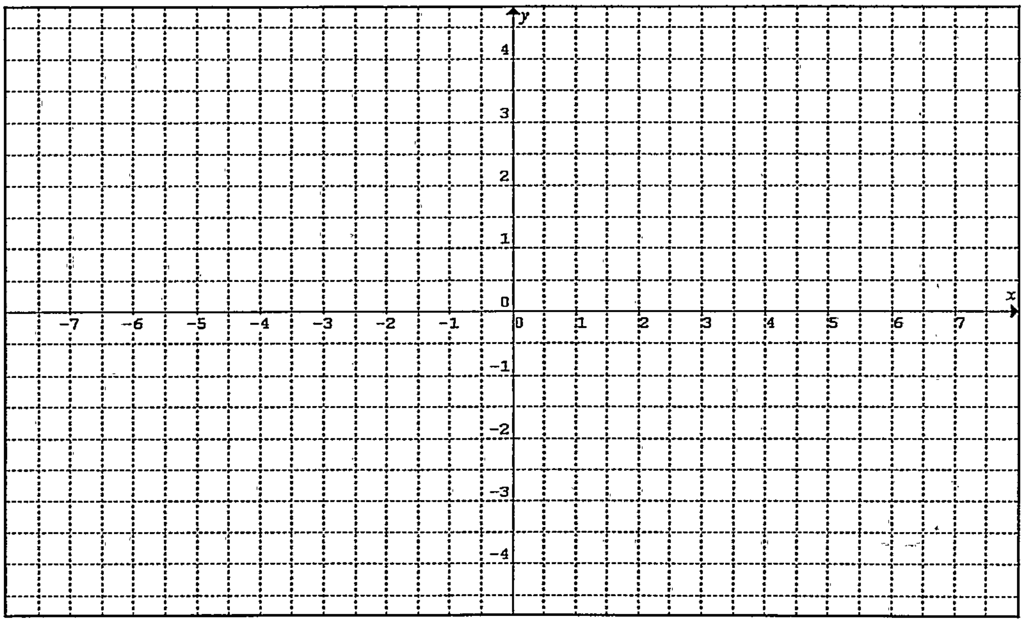


d) $z(x) = 2(x+3)^2 - 0.5$

1º Grafique $z(x) = x^2$

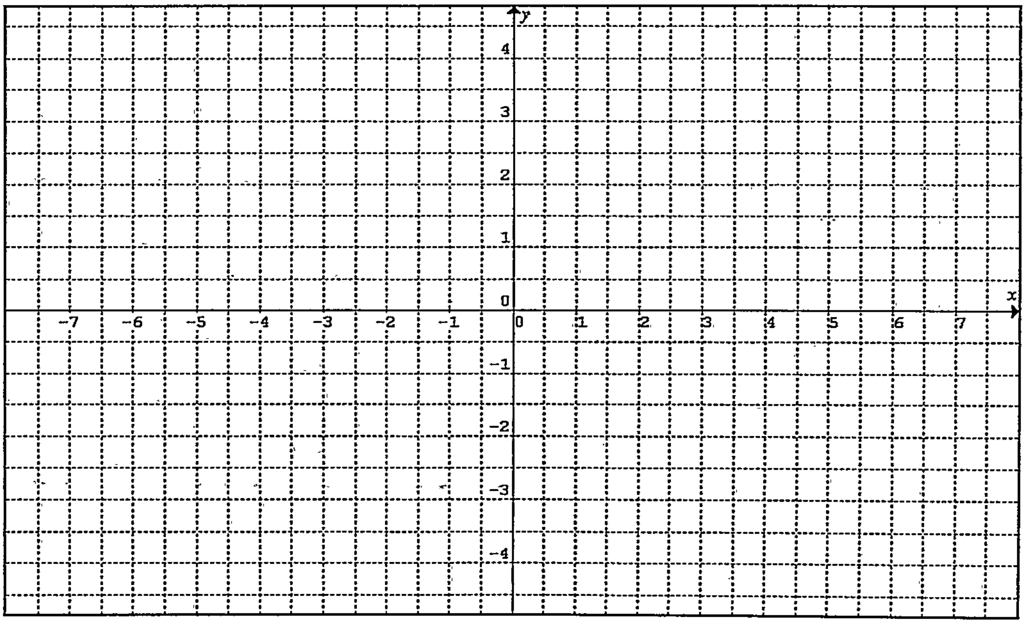


2º Grafique $z(x) = (x+3)^2$

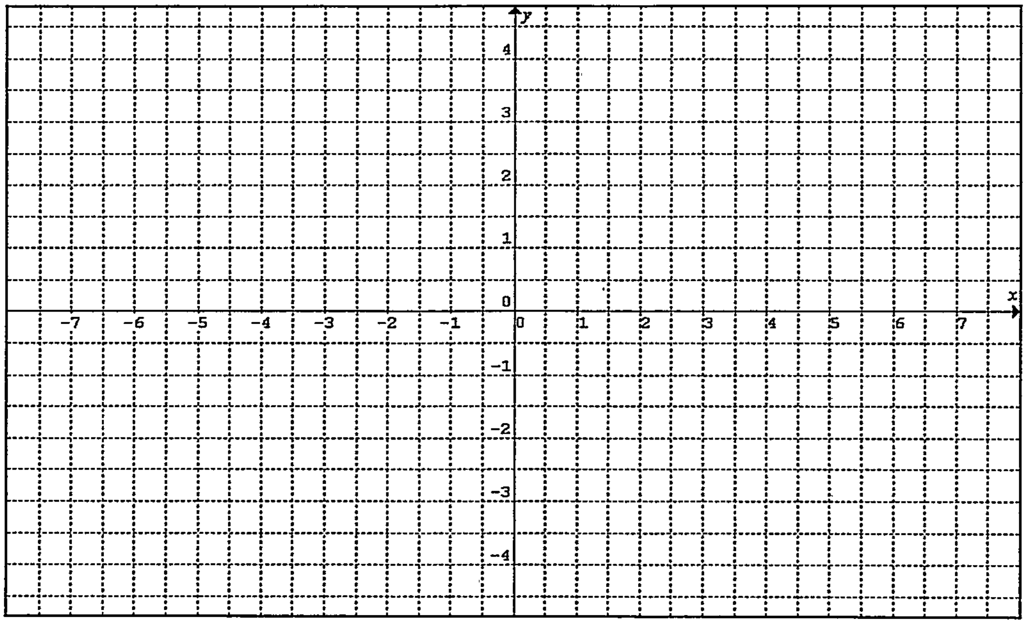


5º Encuentre los interceptos con los ejes coordenados

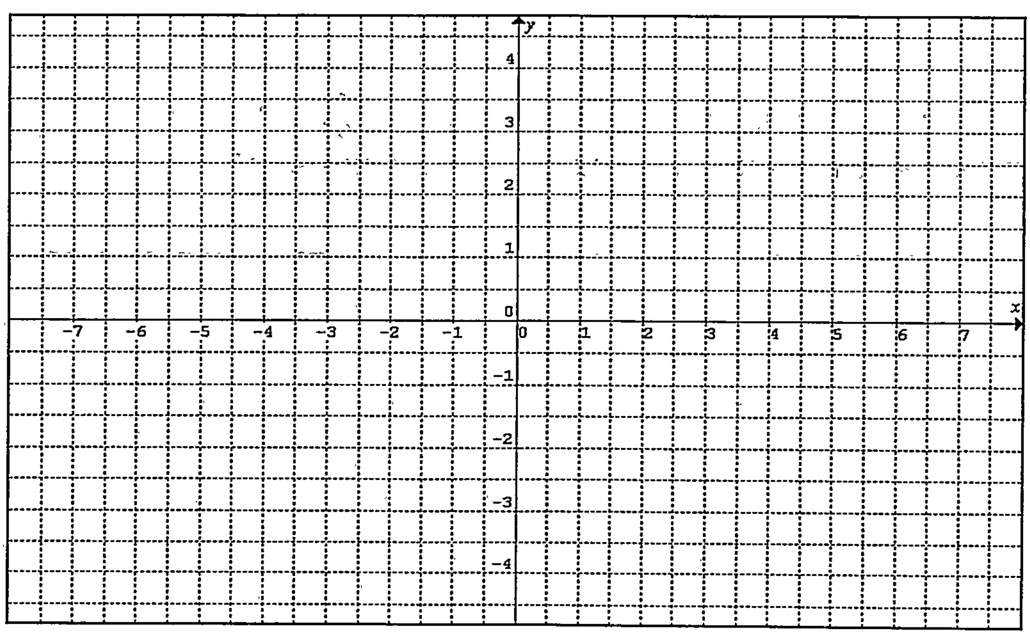
6º Dibuje la gráfica de la función $z(x) = 2(x+3)^2 - 0.5$ tomando en cuenta los interceptos con los ejes coordenados. (Gráfica más exacta)



3º Grafique $m(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2$

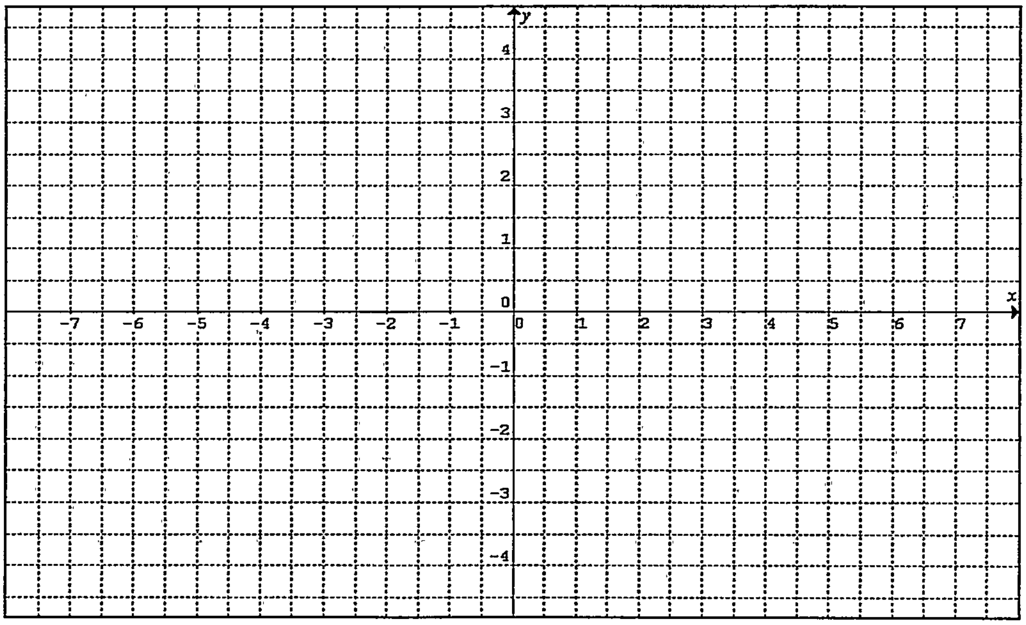


4º Grafique $m(x) = 2 - \frac{1}{2}(x-1)^2$

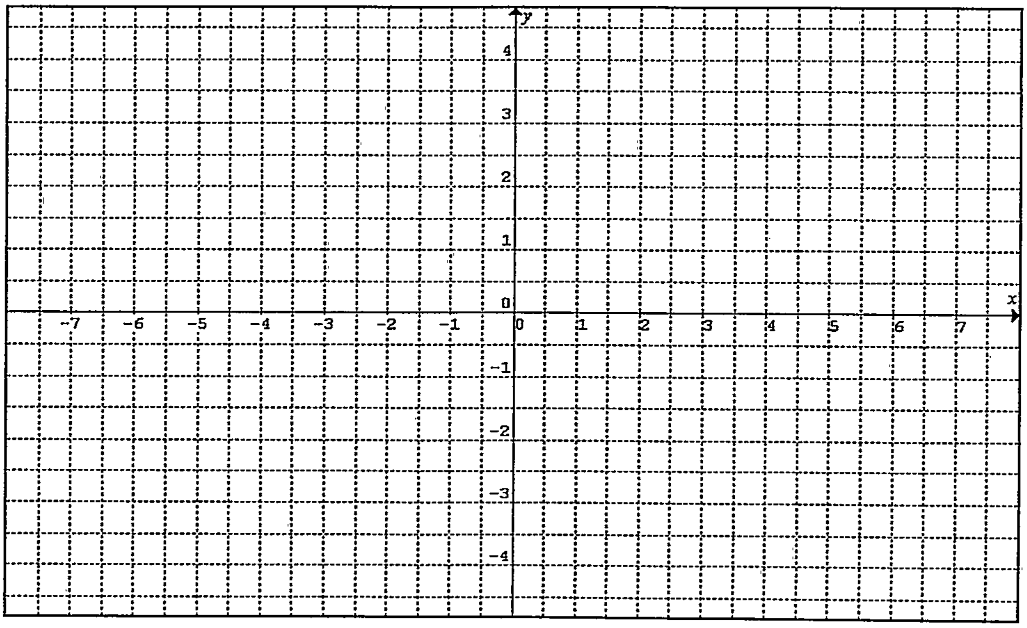


f) $p(x) = |x^2 - 2|$

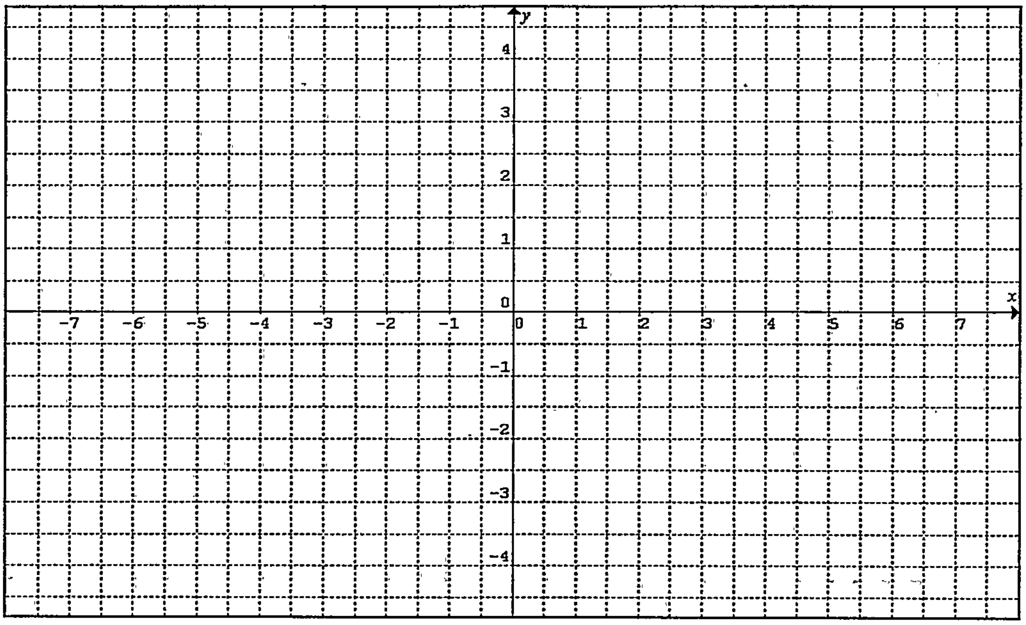
1º Grafique $p(x) = x^2$



2º Grafique $p(x) = x^2 - 2$

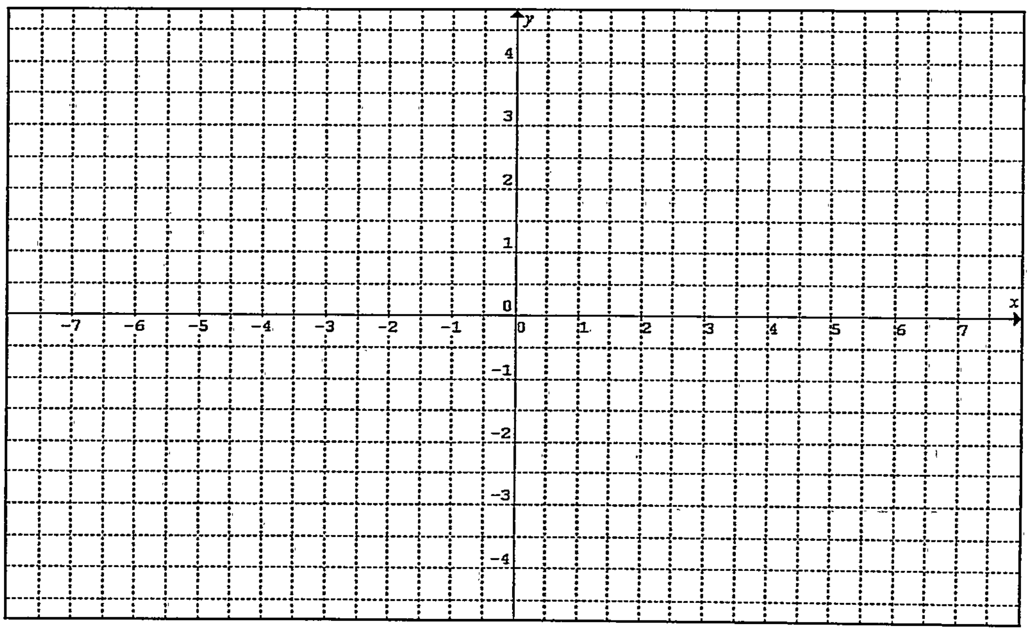


5º Dibuje la gráfica de la función $p(x) = |x^2 - 2|$ tomando en cuenta los interceptos con los ejes coordenados. (Gráfica más exacta)

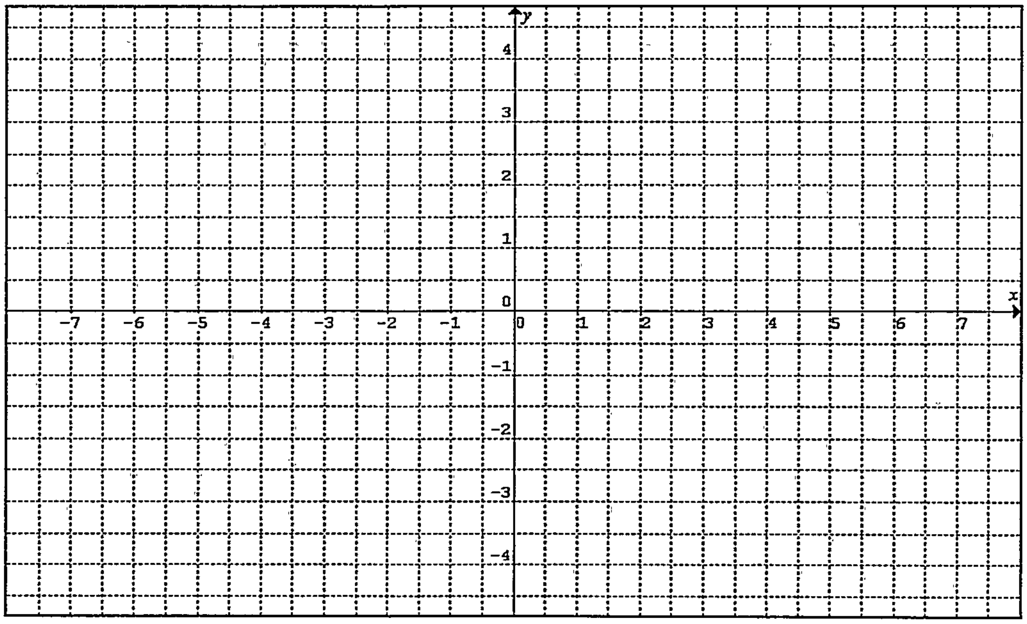


g) $q(x) = |(x + 2.5)^2 - 2|$

1º Grafique $q(x) = x^2$

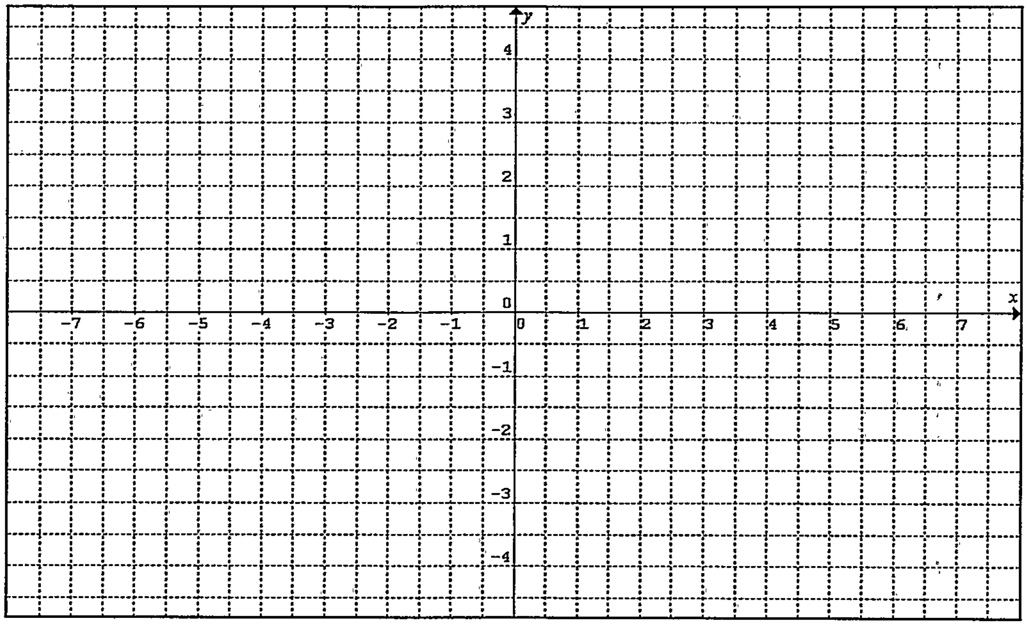


4° Grafique $q(x) = |(x+2.5)^2 - 2|$

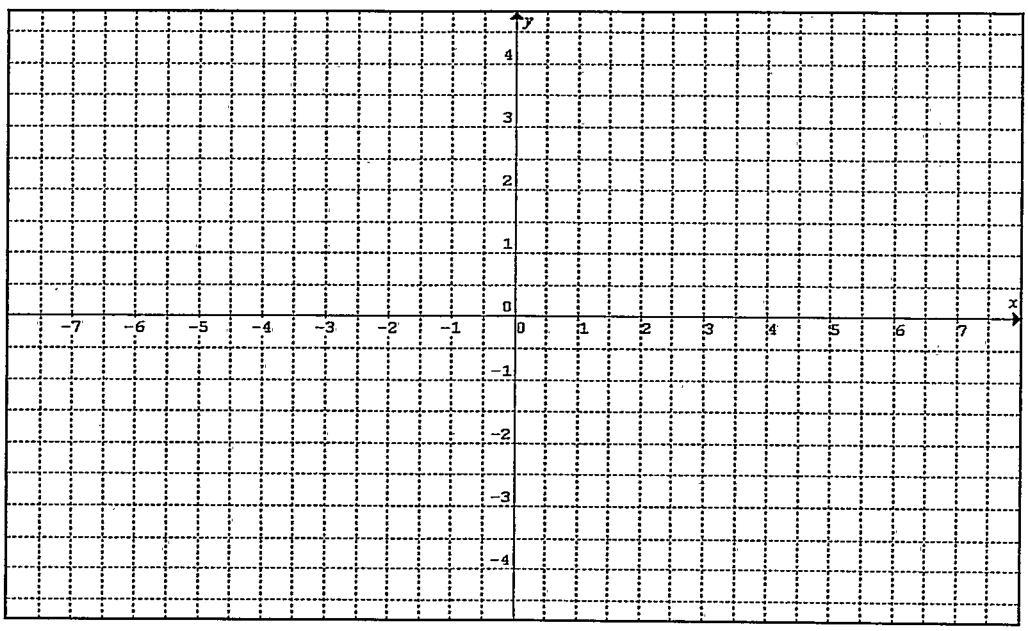


5° Encuentre los interceptos con los ejes coordenados

2º Grafique $r(x) = (x - 3)^2$

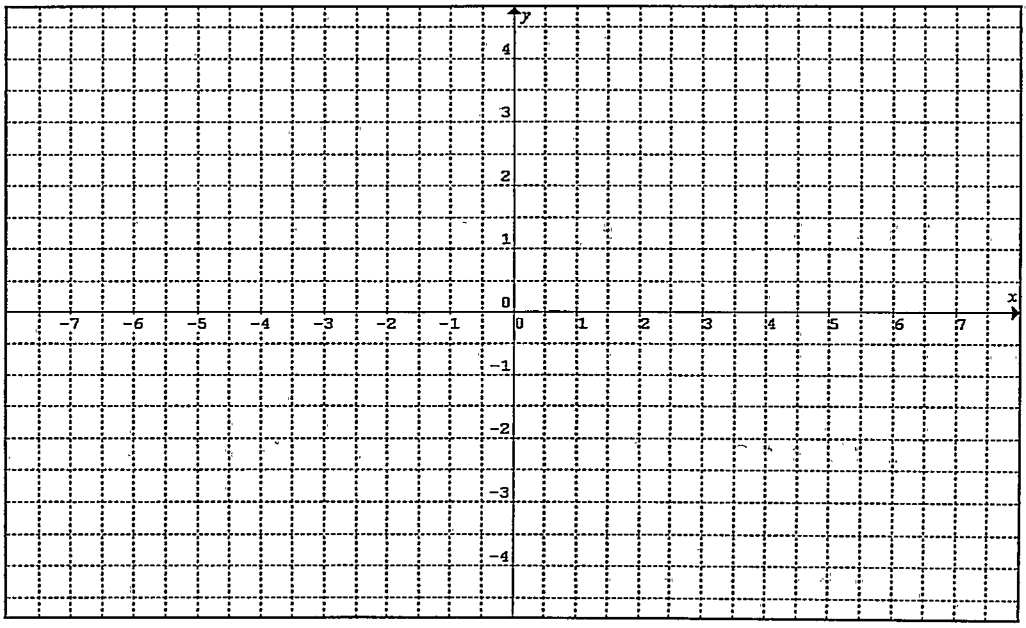


3º Grafique $r(x) = (x - 3)^2 - 1$



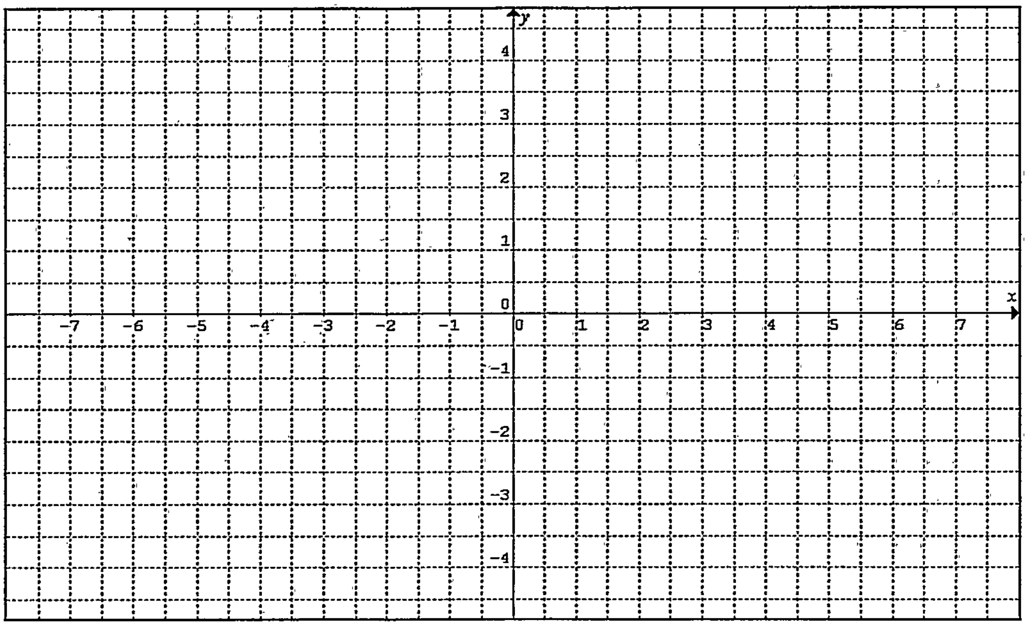
6º Encuentre los interceptos con los ejes coordenados

7º Dibuje la gráfica de la función $(x)=|(x-3)^2-1|-2$ tomando en cuenta los interceptos con los ejes coordenados. (Gráfica más exacta)

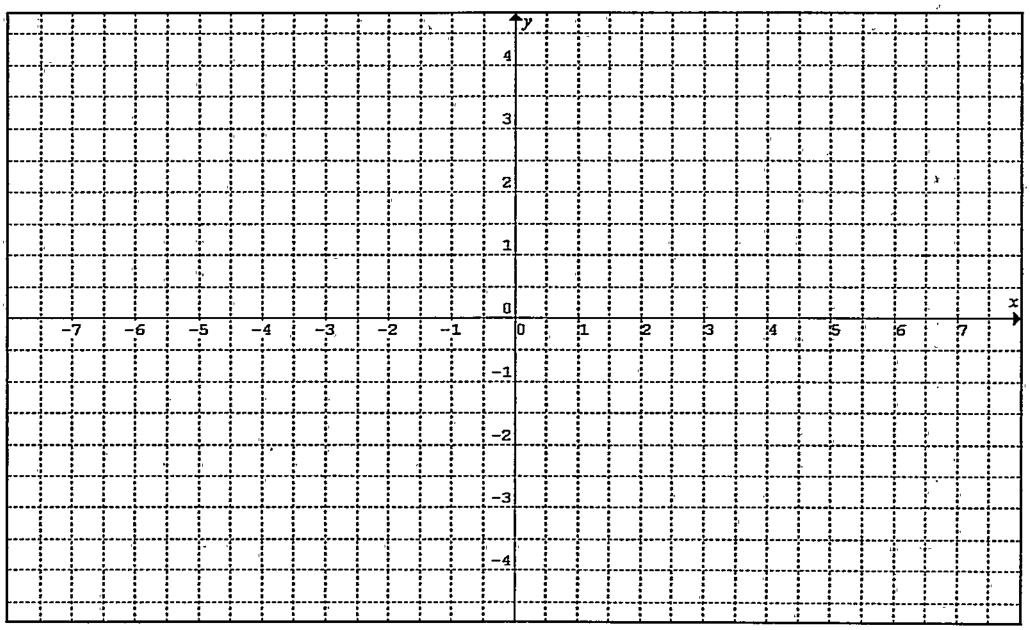


Grafique la función $f(x)=|-(3-x)^2+3|-2$

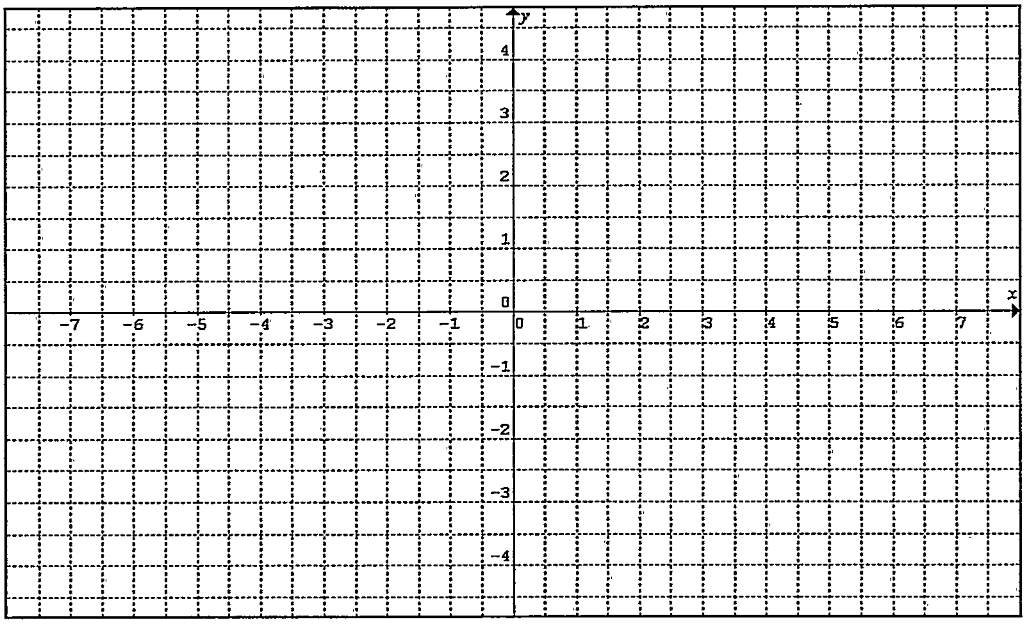
1° Grafique $f(x)=x^2$



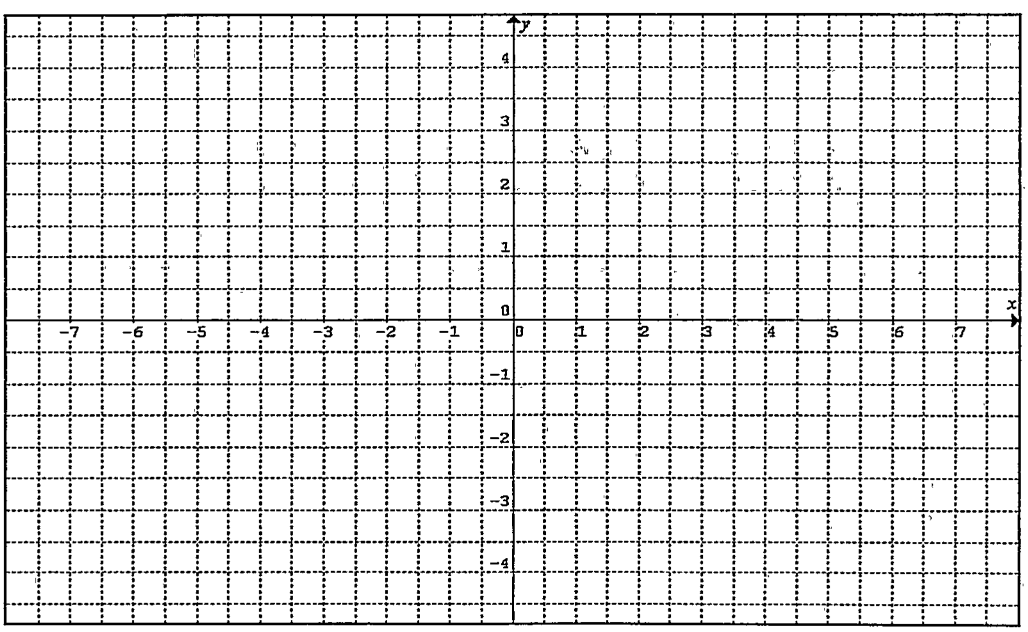
2° Grafique $f(x)=(3-x)^2$



5º Grafique $f(x) = |-(3-x)^2 + 3|$

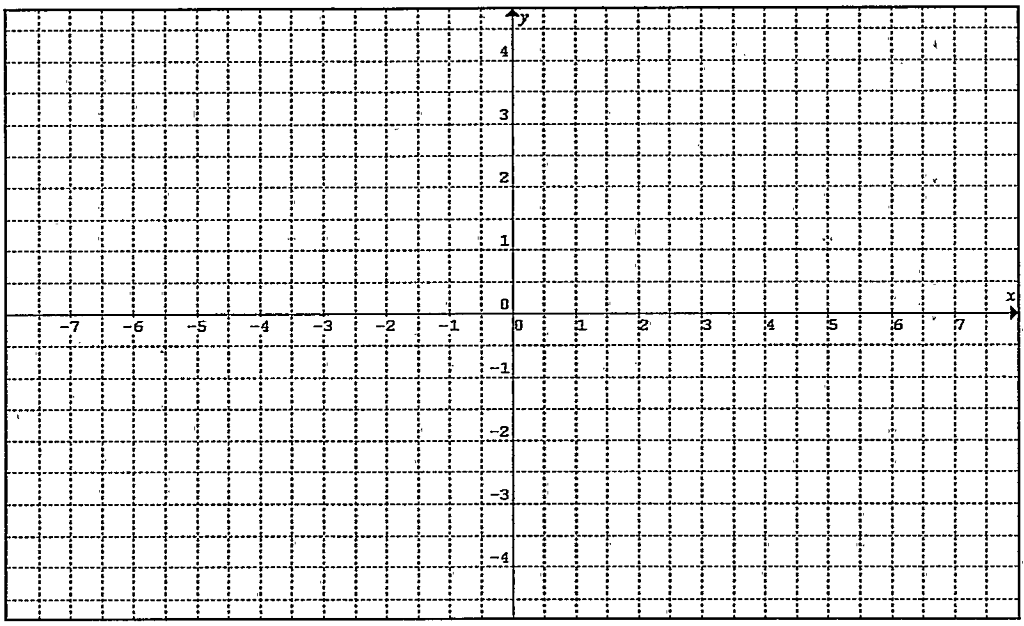


6º Grafique $f(x) = |-(3-x)^2 + 3| - 2$

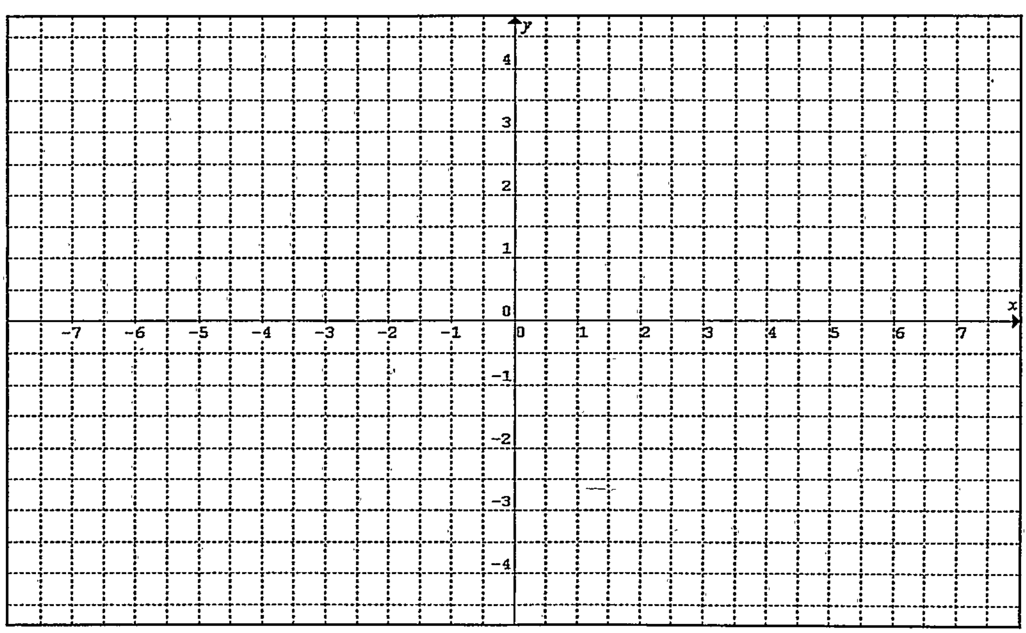


Grafique la función $g(x) = -|-(-1-x)^2 + 1.5| + 3$

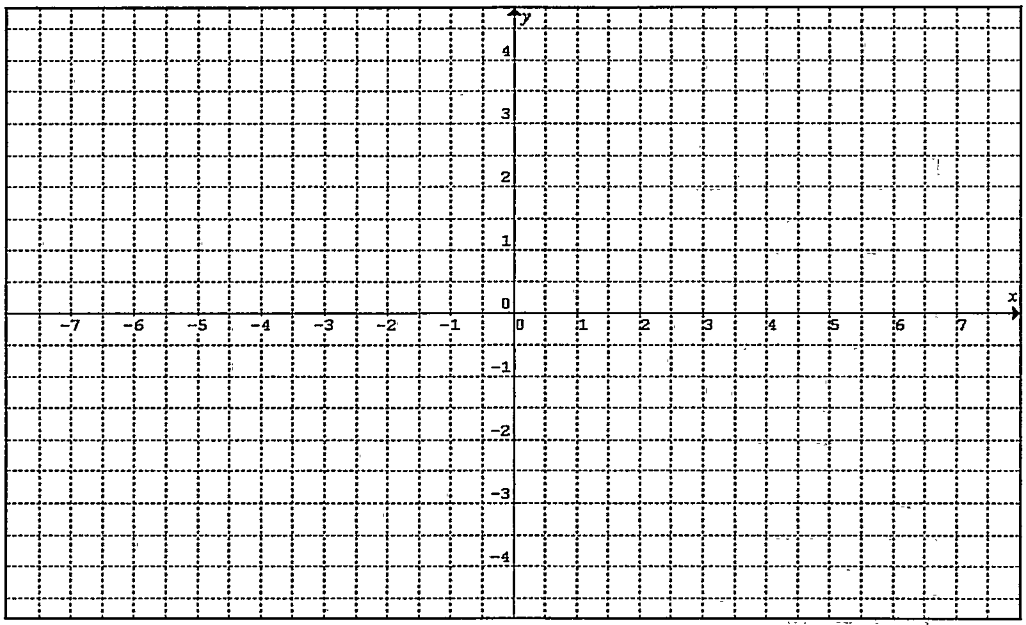
1° Grafique $f(x) = x^2$



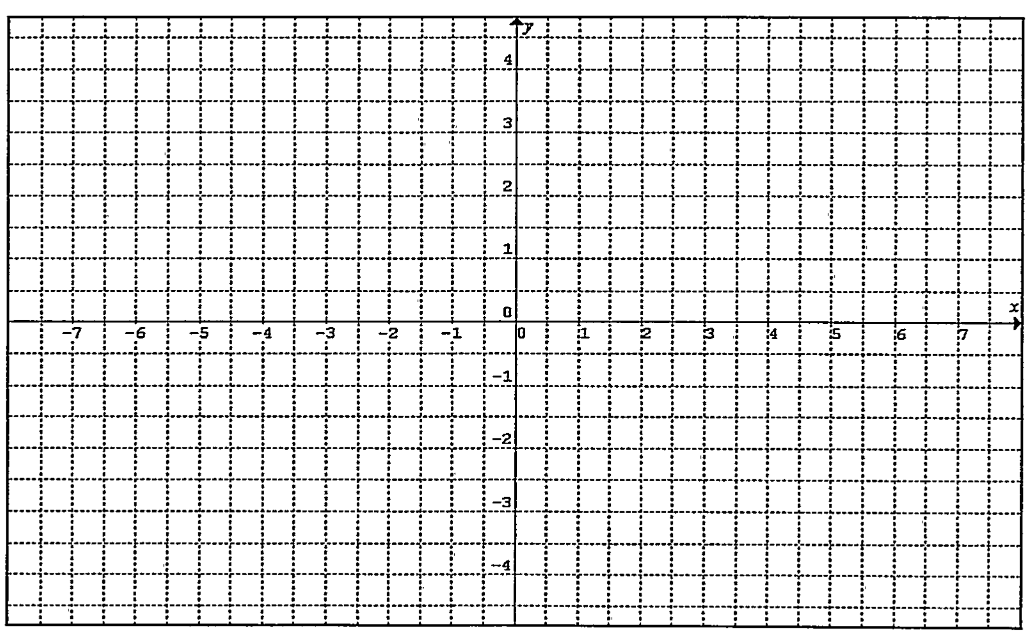
2° Grafique $g(x) = (-1-x)^2$



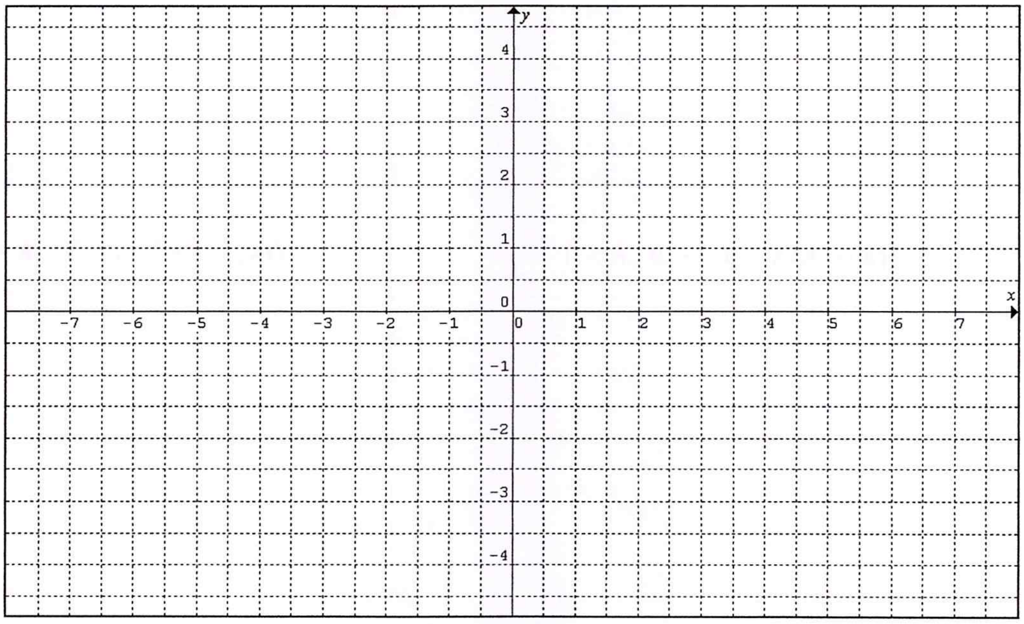
5° Grafique $g(x)=|-(-1-x)^2+1.5|$



6° Grafique $g(x)=-|-(-1-x)^2+1.5|$

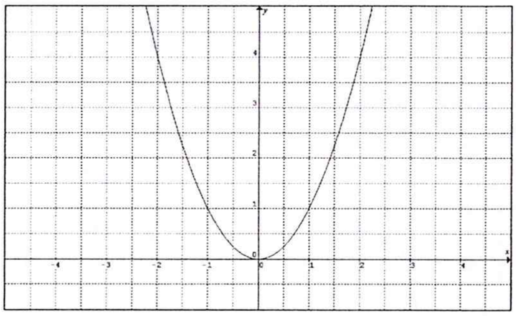


9º Dibuje la gráfica de la función $g(x) = -|-(-1-x)^2 + 1.5| + 3$ tomando en cuenta los interceptos con los ejes coordenados. (Gráfica más exacta)

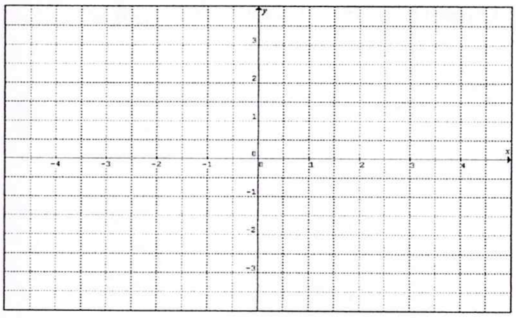


Bosqueje la gráfica corresponde:

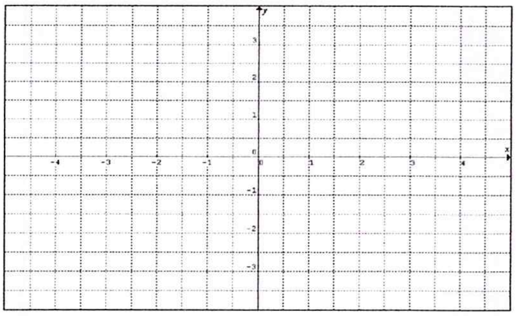
$f(x) = x^2$



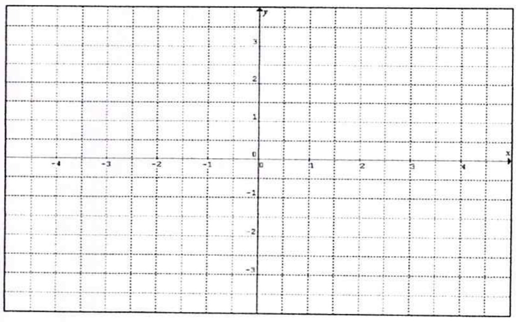
$f(x) = x^2 + d$



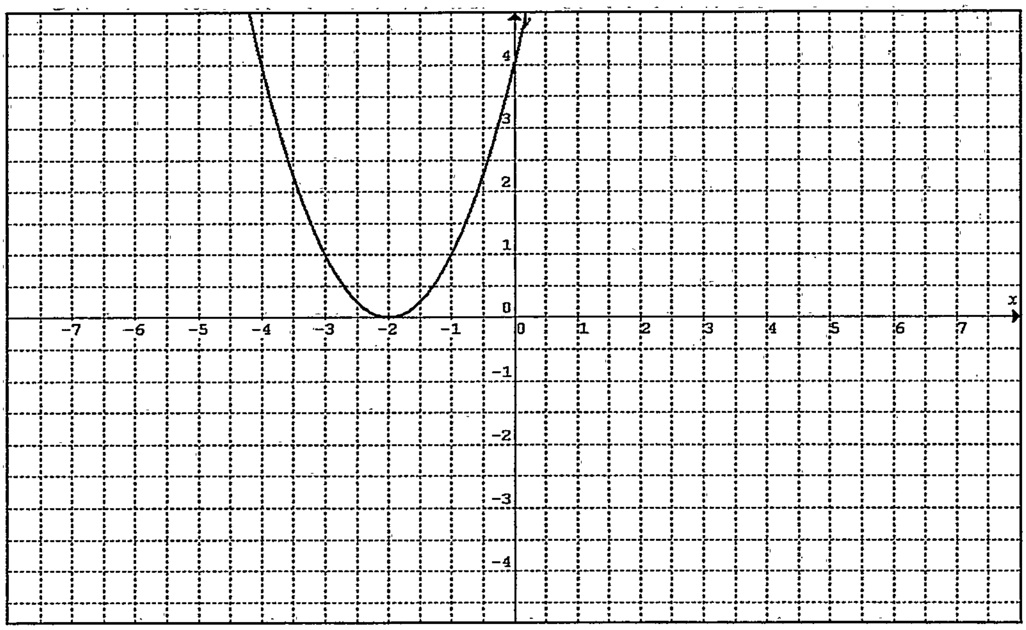
$f(x) = k(x-d)^2;\ k = -1$



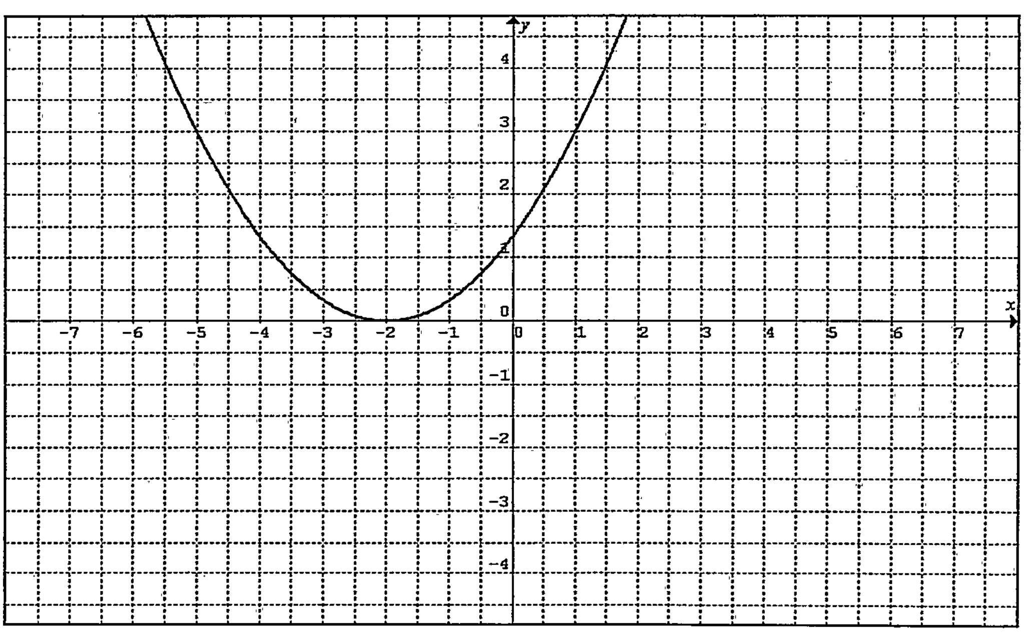
$f(x) = kx^2 + b;\ k < -1$



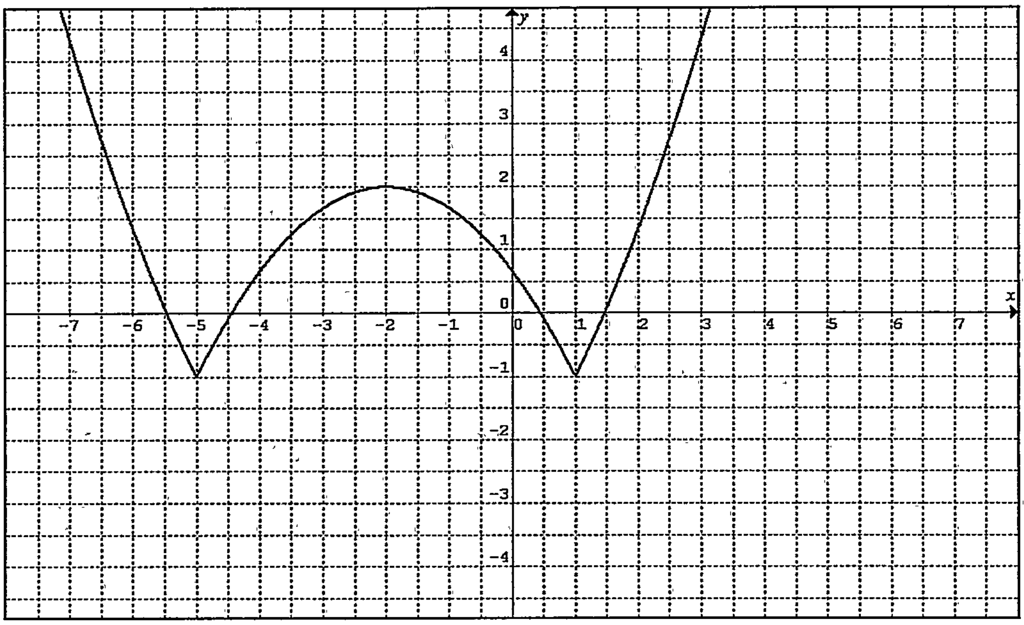
2º ____


y
x
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6 7

3º ____


y
x
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6 7

6º ____



7º ____

$$f(x)=\left|\frac{1}{3}(x+2)^2-3\right|-1$$

$$I_y:?\ \Rightarrow\ x=0$$

$$f(0)=\left|\frac{1}{3}(0+2)^2-3\right|-1$$

$$f(0)=\left|\frac{4}{3}-3\right|-1$$

$$f(0)=\left|-\frac{5}{3}\right|-1$$

$$f(0)=\frac{5}{3}-1$$

$$f(0)=\frac{2}{3}$$

$$I_y:\left(0,\frac{2}{3}\right)$$

Hasta ahora hemos graficado funciones del tipo $f(x)=k(x+a)^2+b$; $a,b,k\in\mathbb{R}$; si desarrollamos el binomio y realizamos las operaciones indicadas tendremos:

Describa cada paso del proceso desarrollado a continuación:

$f(x)=k(x+a)^2+b$ ____________________

$f(x)=k(x^2+2ax+a^2)+b$ ____________________

$f(x)=kx^2+2akx+ka^2+b$ ____________________

$f(x)=kx^2+2akx+(ka^2+b)$ ____________________

$f(x)=Ax^2+Bx+C$ ____________________

donde, $A=$____; $B=$____; $C=$______

Una función de la forma $f(x)=Ax^2+Bx+C$ es la representación más general de una función cuadrática; donde $A,B,C\in\mathbb{R}$, $A\neq 0$.

¿Cómo se graficará la función $f(x)=3x^2+11x-1$ sin tabla de valores?

____

¿Cómo se expresa la función $f(x)=3x^2+11x-1$ en la forma $f(x)=k(x+a)^2+b$?

____

Para recordar dicho procedimiento, describa cada paso del proceso desarrollado a continuación:

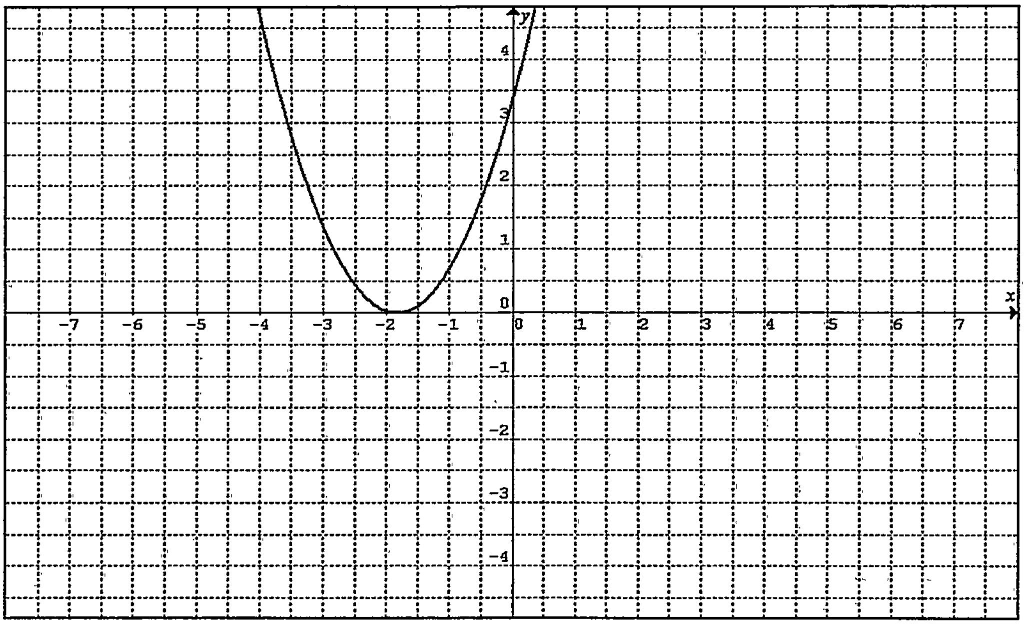
Dada la expresión $k(x+a)^2+b$

1° $k(x^2+2ax+a^2)+b$ ________________________________

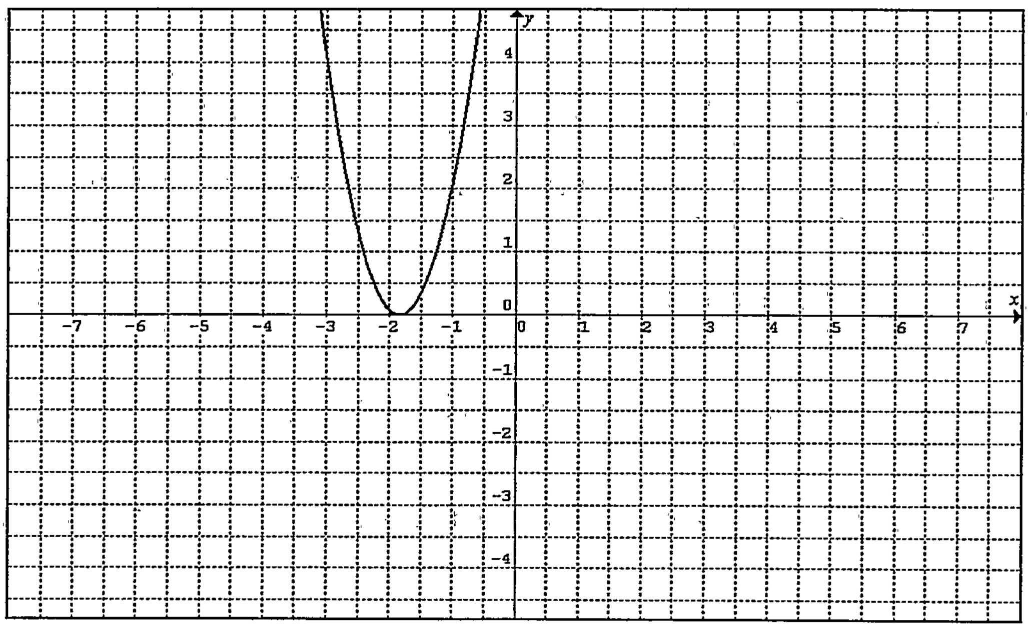
2° $kx^2+2akx+ka^2+b$ ________________________________

Ahora aplicaremos a la función $f(x)=3x^2+11x-1$ el procedimiento inverso;

$$f(x) = (x + \frac{11}{6})^2$$



$$f(x) = 3\,(x + \frac{11}{6})^2$$

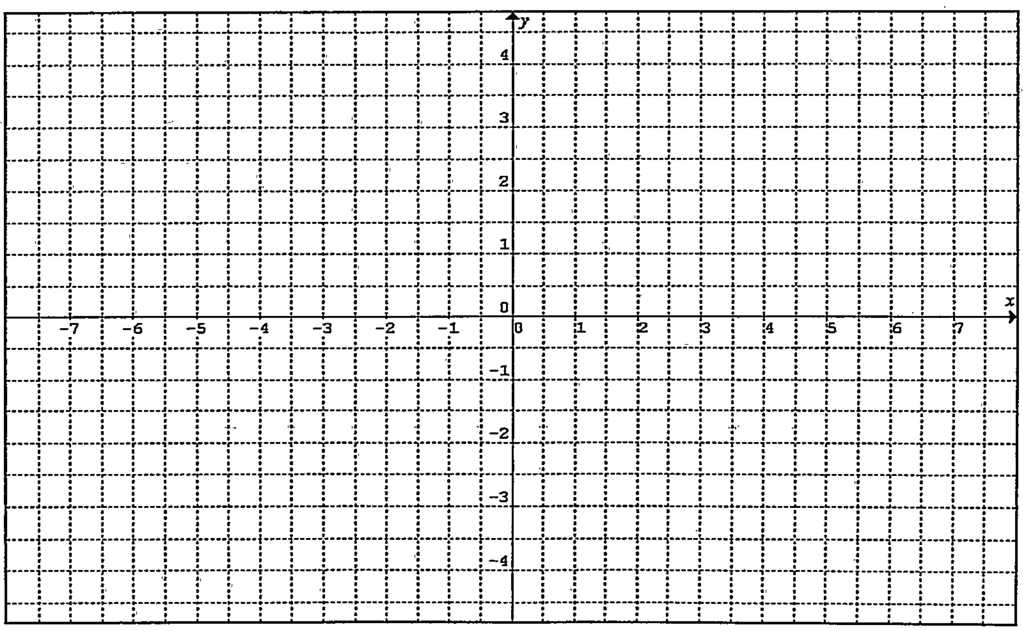


d) Factorice el trinomio cuadrado perfecto y realice la operación indicada en el otro término..

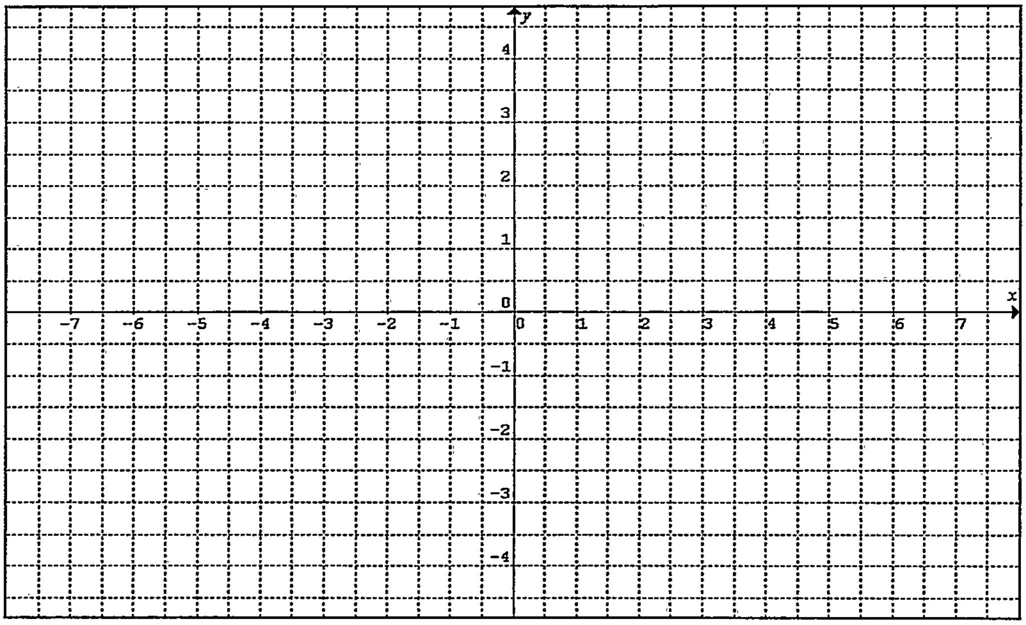
____

e) Exprese la función en la forma requerida ______________________________

2º Grafique la función $f(x)=x^2$



5° Grafique la función $f(x) = k(x+a)^2 + b$ hacia arriba o hacia abajo según corresponda, (valor de b)



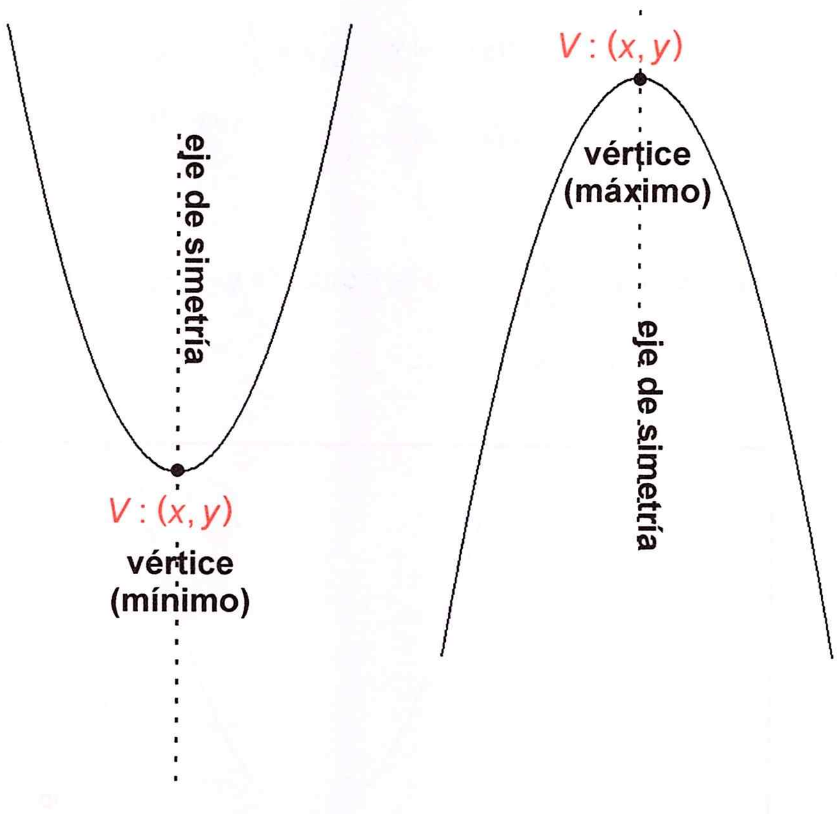
6° Calcule los interceptos con los ejes coordenados

4.3.7 Análisis de la función cuadrática

La importancia que tiene la función cuadrática por su aplicación directa ya sea en Ingeniería, Arquitectura o Economía; hace necesario realizar un análisis de la misma.

a) *Análisis de la gráfica:*

A continuación, se presenta la gráfica y se resaltan sus características esenciales:



¿Cómo saber si se abre hacia arriba o hacia abajo?

Revise las funciones cuadráticas graficadas anteriormente y comparé la regla de correspondencia y la gráfica. Infiera una conclusión.

____

____

____

Encuentre el vértice de la función $f(x)=2x^2+3x-5$

Complete:

$a=$______; $b=$______; $c=$______. Por lo tanto, $\bar{x}=$______; $\bar{y}=$______

Calcule el vértice de la función $g(x)=2-(x+3)^2+x$

a) realice las operaciones indicadas y escriba la función en la forma general

____

____

____

b) Complete:

$a=$______; $b=$______; $c=$______. Por lo tanto, $\bar{x}=$______; $\bar{y}=$______

Halle el vértice de la función $h(x)=(5-x)(0.5x+1)-2$

a) realice las operaciones indicadas y escriba la función en la forma general

____

____

b) Complete:

$a=$______; $b=$______; $c=$______. Por lo tanto, $\bar{x}=$______; $\bar{y}=$______

¿Cuál es la ecuación del eje de simetría?

Resuelve los siguientes ejercicios:

1. Dada la función $f(x)=(x-3)(3x+1)$

a) Calcule los interceptos con los ejes coordenados

b) Encuentre el vértice

c) Grafique la parábola

Analice la siguiente demostración:

Si x_1 y x_2 son raíces de la función $f(x)=ax^2+bx+c$; entonces, la función se puede expresar como $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$. Es decir,

$$f(x)=ax^2+bx+c \Leftrightarrow f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$$

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

$$f(x)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) \circledast$$

Como se demostró anteriormente:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \quad \text{y} \quad x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}$$

Reemplazando en $\circledast$

$$f(x)=a[x^2-(x_1+x_2)x+x_1 \cdot x_2]$$

Recordando la factorización de un trinomio:

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1 \cdot x_2=(x-x_1)(x-x_2)$$

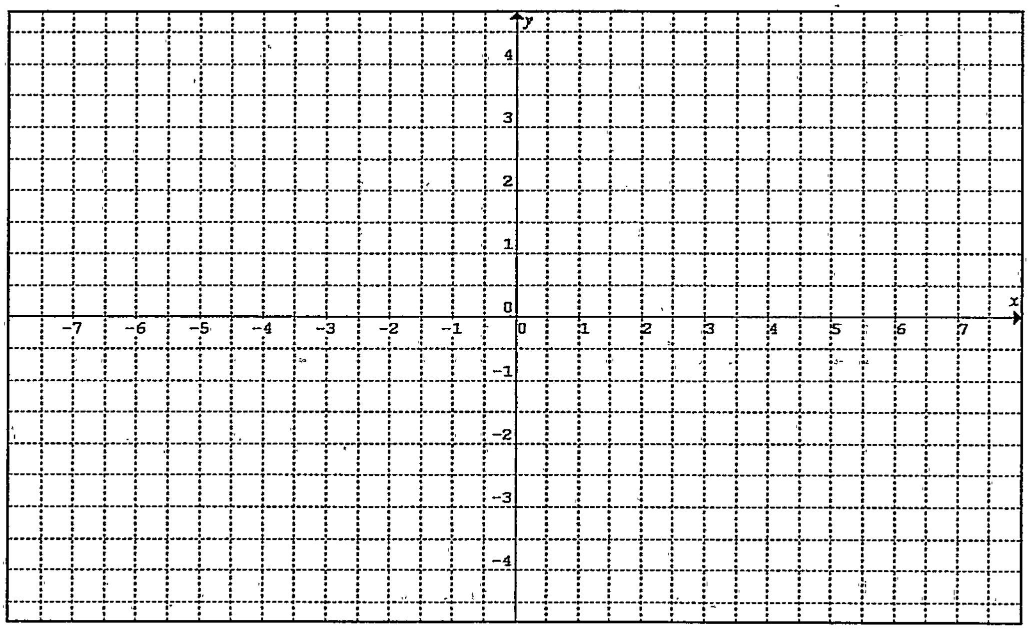
Por lo tanto;

$$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)_{\blacklozenge}$$

Como se quería demostrar.

c) El intercepto con el eje y

d) Grafique la función



Ejercicios

1. Encuentre el vértice, los interceptos y grafique cada función:

a) $f(x) = (2x - 3)(4 - 2x) - 5x + 1$

b) $g(x) = x^3 - \left(x + \frac{3}{2}\right)(x + 6)(7 + x)$

c) $h(x) = \dfrac{3 - x^2 + 8}{6}$

d) $p(x) = \frac{5}{2}(x - 1)\left(\frac{2}{3}x + 9\right)$

e) $q(x) = 6(2 - x) - 4 + 2x(x + 3)$

f) $r(x) = x^2 + x + 1$

g) $z(x) = -3x^2 + 2x - 5$

Función cúbica

Ayuda memoria:

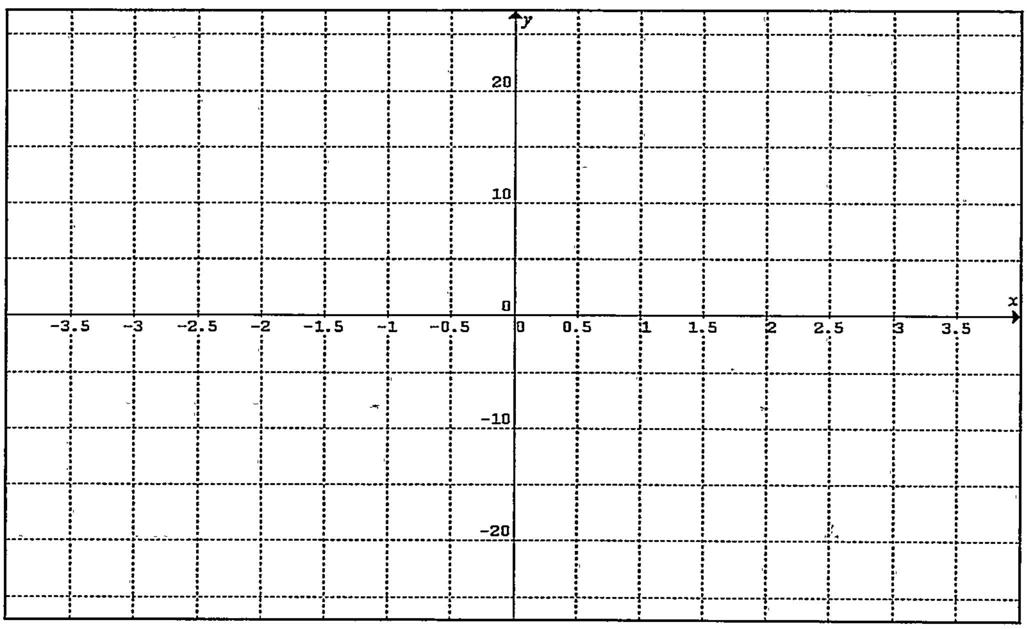
Un número real negativo elevado a una potencia impar es negativo y un número real positivo elevado a una potencia impar es positivo.

$$(-4)^3 = -64;\ \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}$$

La función cúbica en la forma más elemental está dada por $f(x) = x^3$.

Su gráfica puede ser representada en el plano cartesiano calculando la siguiente tabla de valores:

x	-3	-2	-25	-15	-1	0	5	1	15	2	3
y											

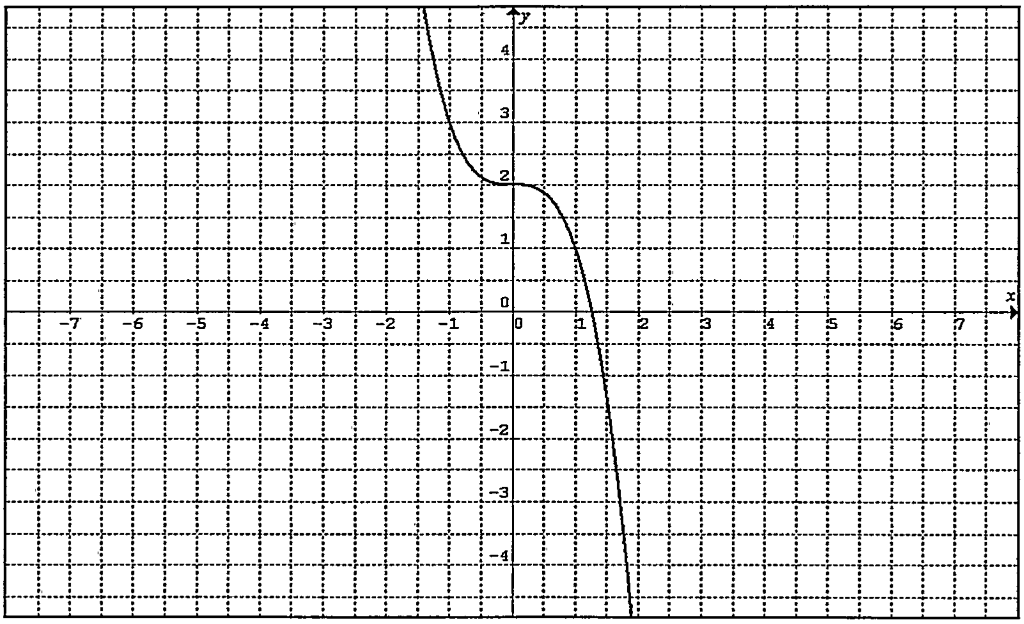


Describa las características de la función y su gráfica

Forma: ______________________________

Simetría: ______________________________

Describa los cambios (traslación y/o rotación) que tiene la gráfica de la función $f(x) = -x^3 + 2$ mostrada a continuación, con respecto a la función básica $f(x) = x^3$



Traslación horizontal: ______________________________

Traslación vertical: ______________________________

Rotación: ______________________________

¿Existe simetría? ¿con respecto a quién?

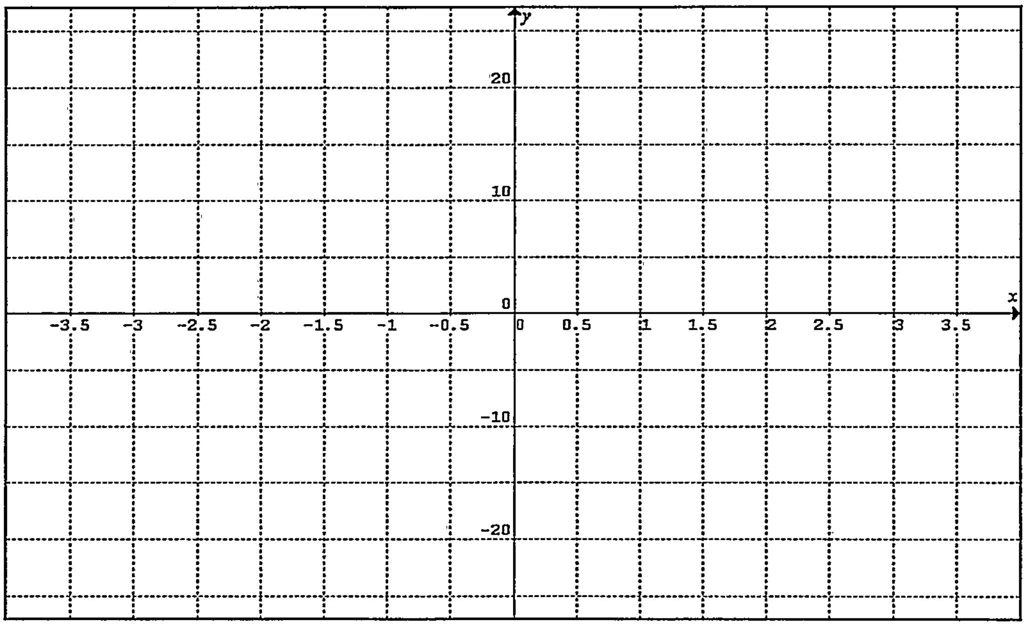
____

Calcule:

$Dom f =$ ____________

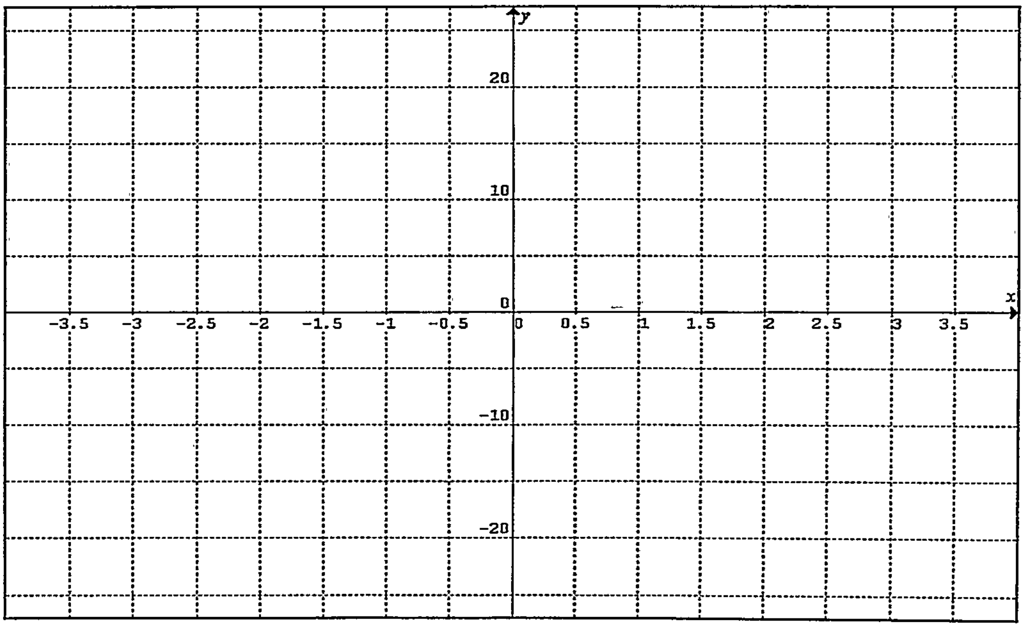
$Rang f =$ ____________

Gráfica exacta

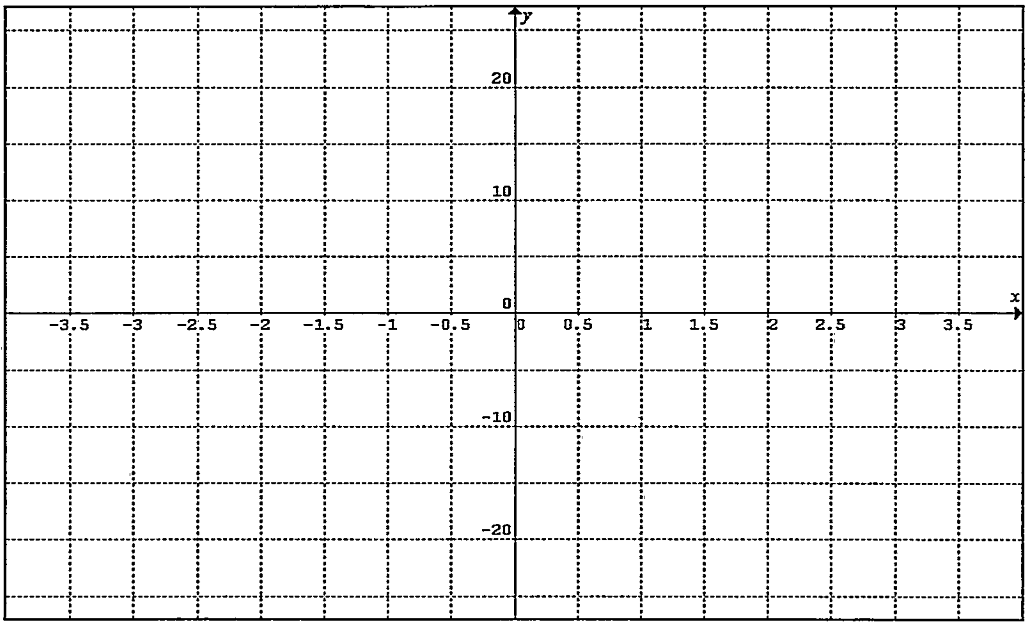


b) $f(x) = -(x + 1.5)^3 + 3$

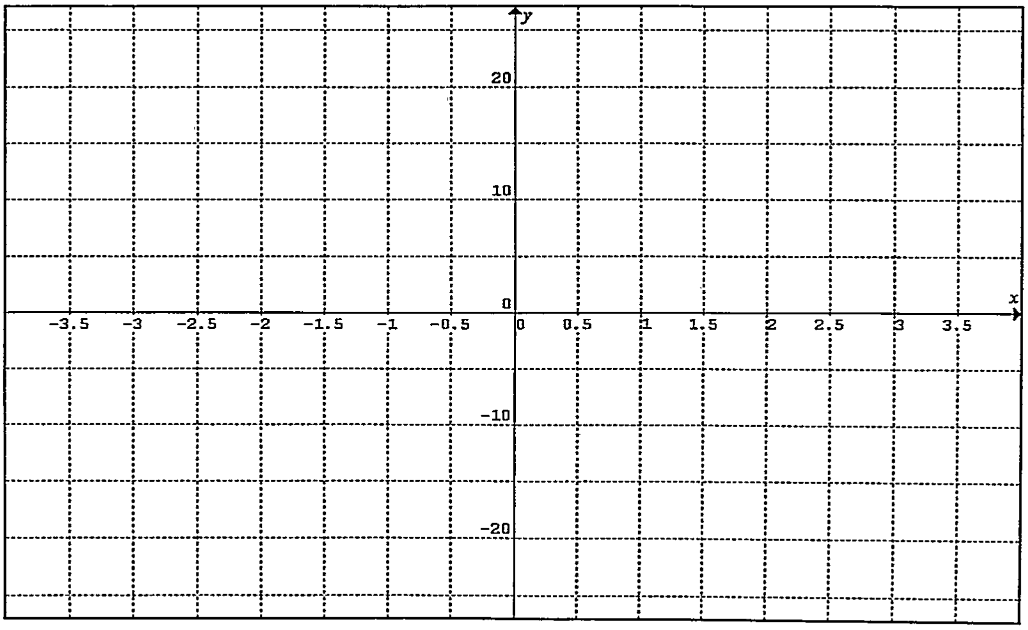
Bosquejo de la gráfica



Bosquejo de la gráfica



Gráfica exacta

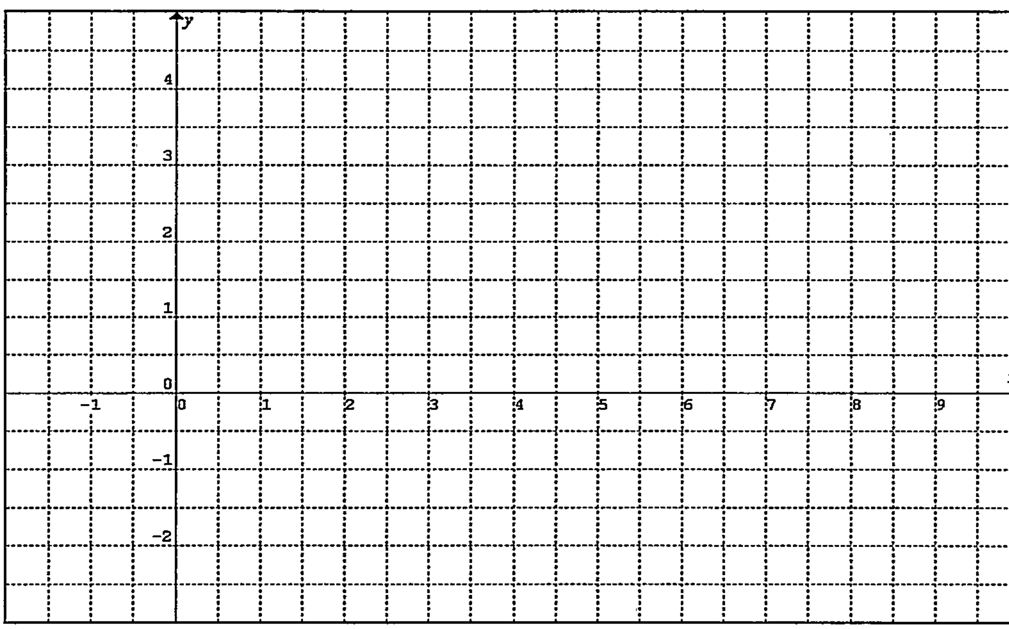


Función raíz cuadrada

La función raíz cuadrada en la forma más elemental está dada por $f(x) = +\sqrt{x}$.

Su gráfica puede ser representada en el plano cartesiano calculando la siguiente tabla de valores:

x	-3	-2	-25	-15	-1	0	5	1	15	2	3
y											



Describa las características de la función y su gráfica

Forma: ________________________________

Simetría: ________________________________

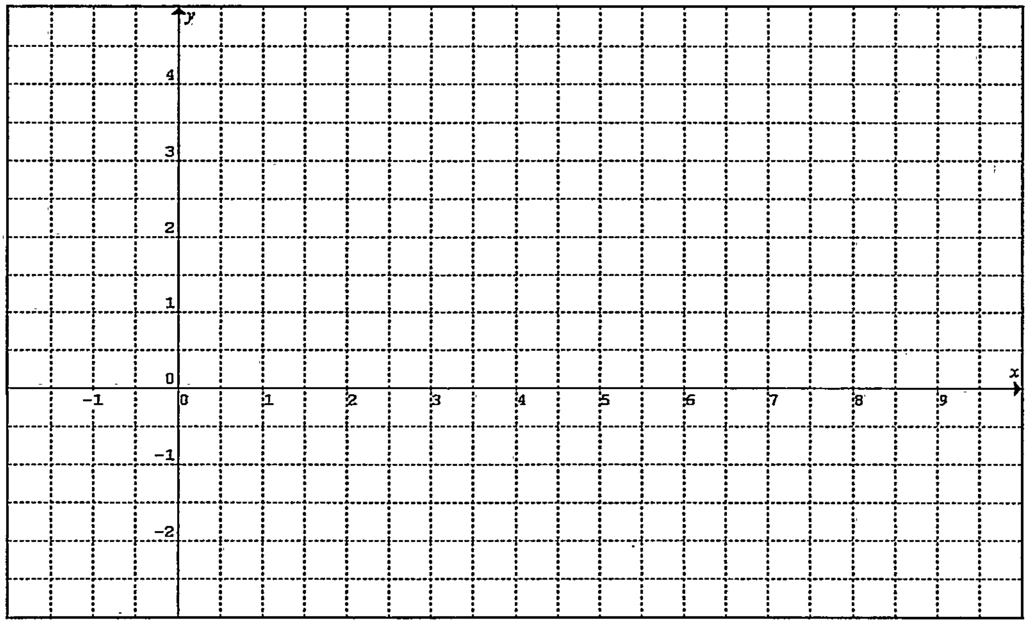
Dominio: ________________________________

Rango: ________________________________

Atención

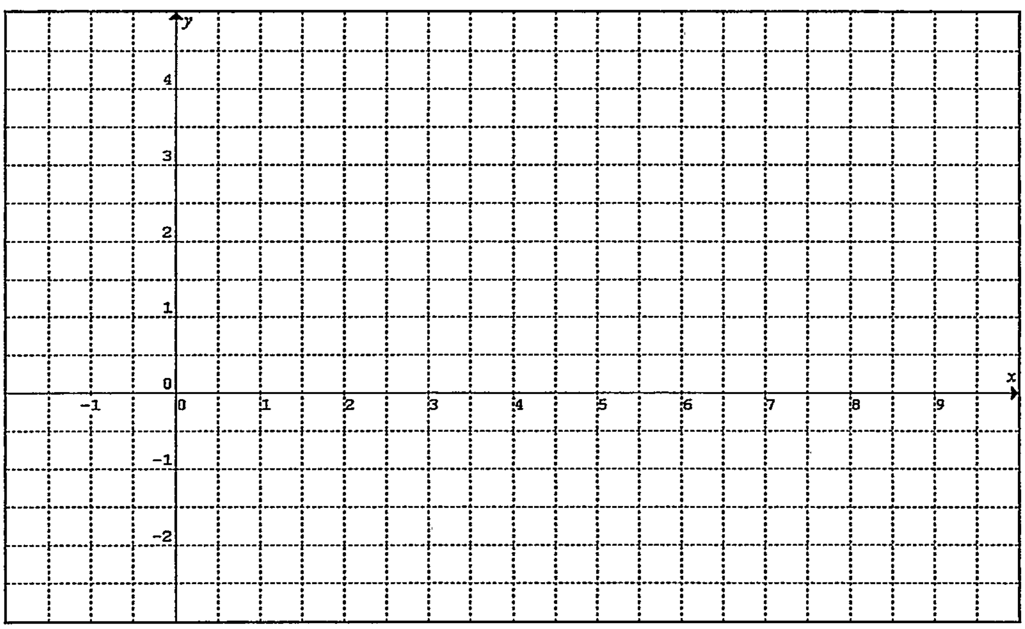
En adelante, $\sqrt{x} = +\sqrt{x}$

Gráfica de la función

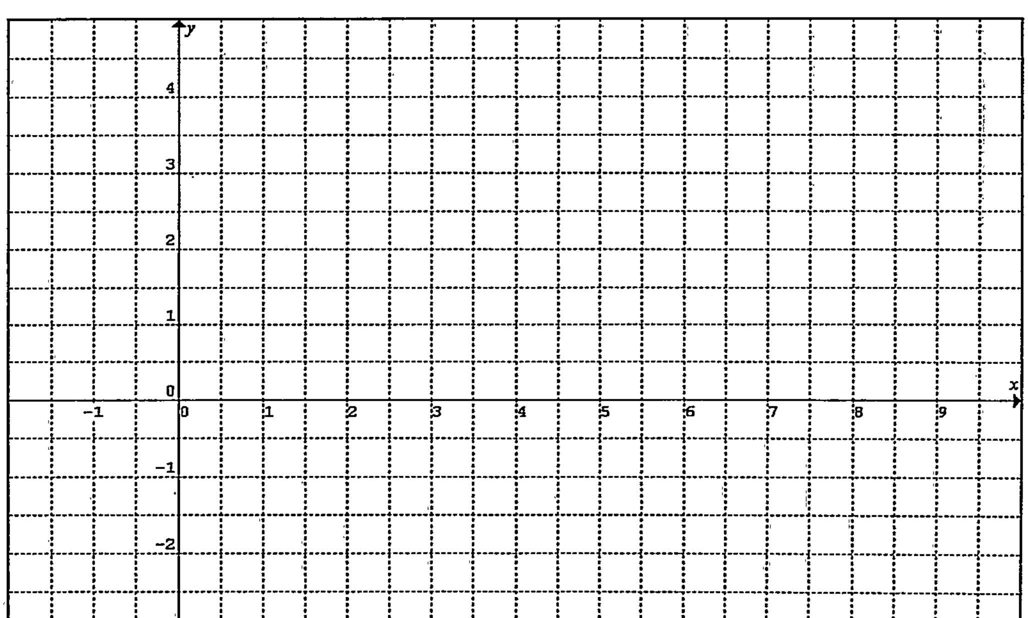


b) $f(x)=\sqrt{x+1}$

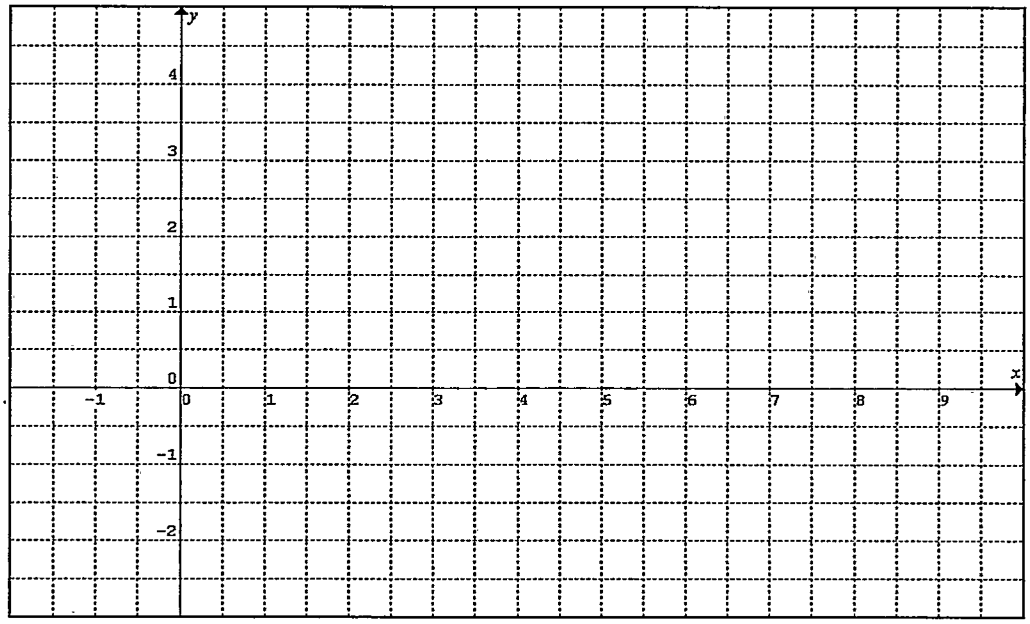
Bosquejo de la gráfica



Gráfica de la función

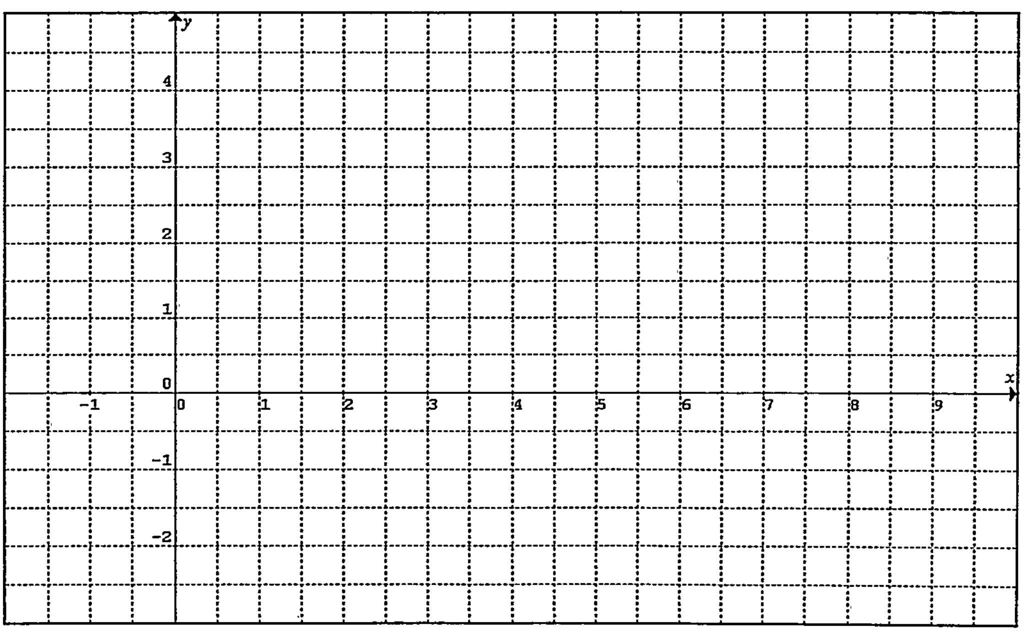


Gráfica de la función

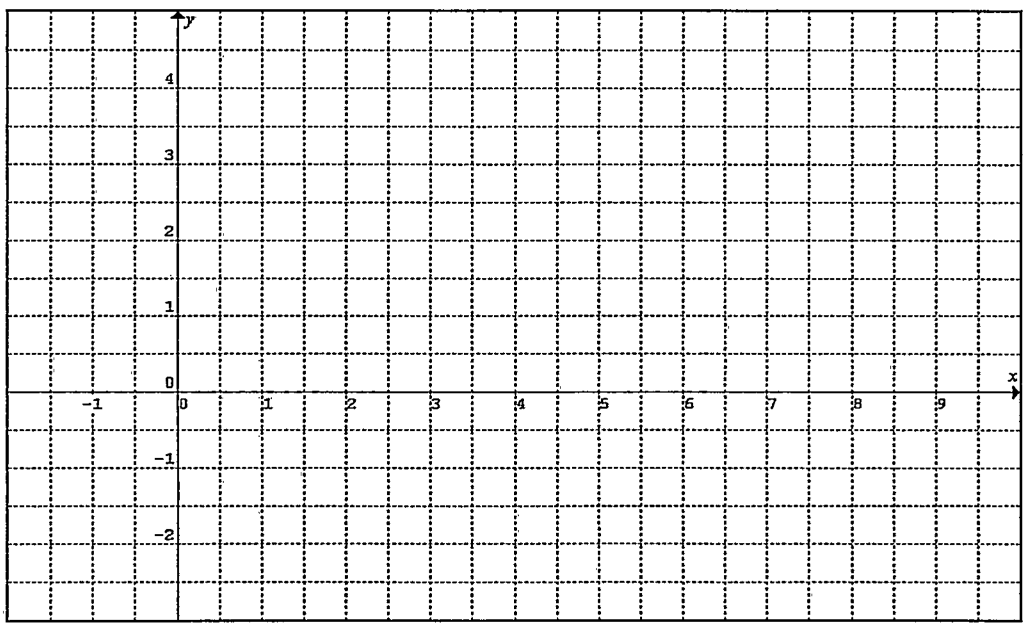


e) $f(x) = -\sqrt{x} + 3$

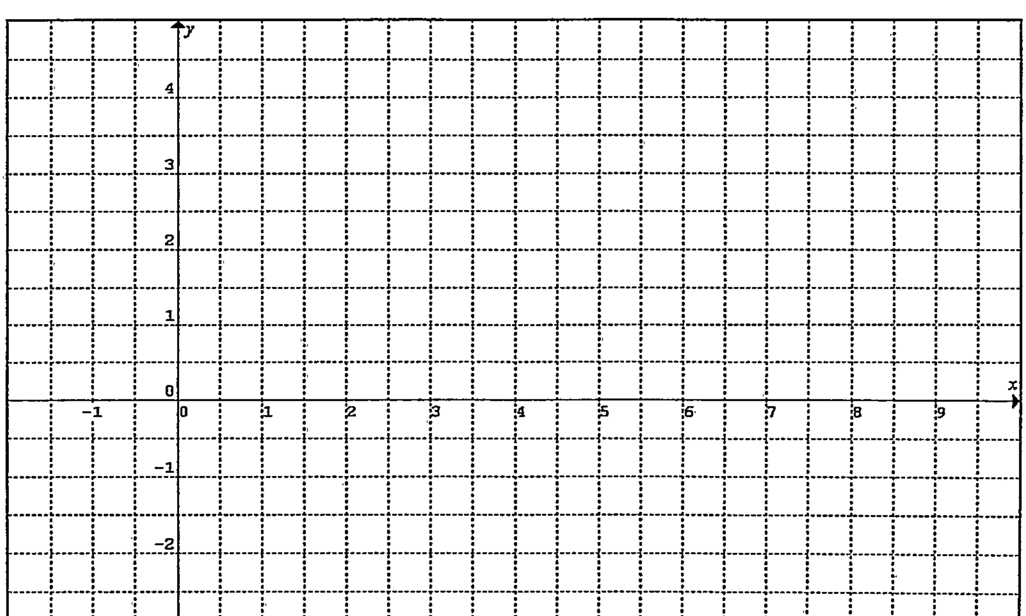
Bosquejo de la gráfica



Bosquejo de la gráfica

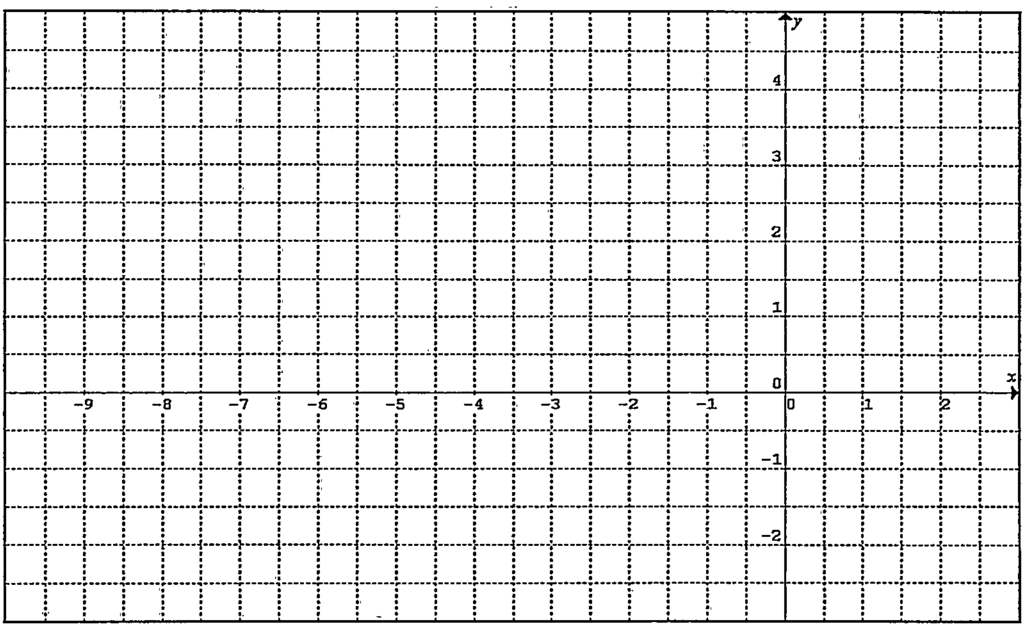


Gráfica de la función

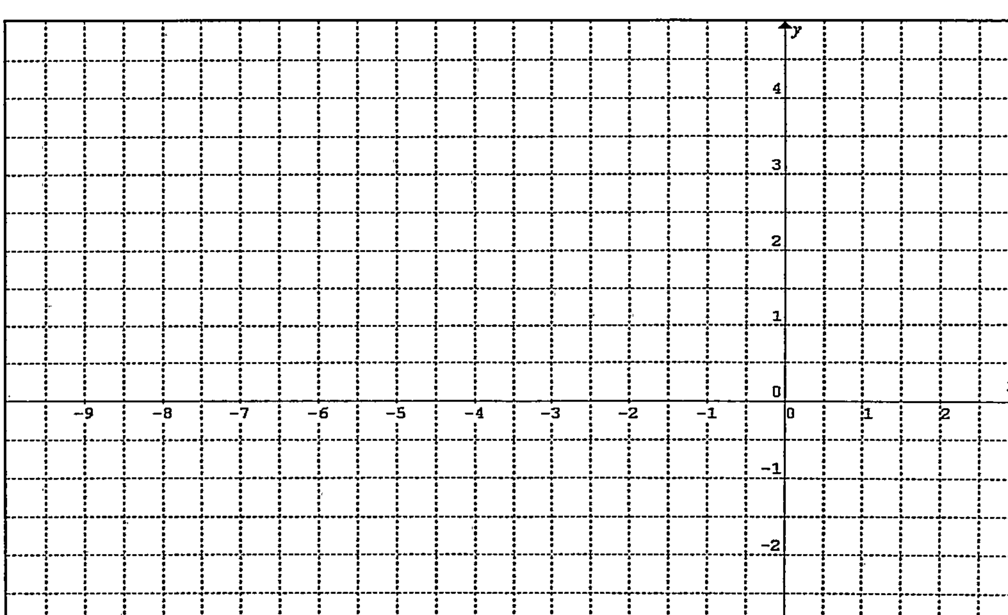


i) $f(x) = \sqrt{-x} - 1$

Bosquejo de la gráfica

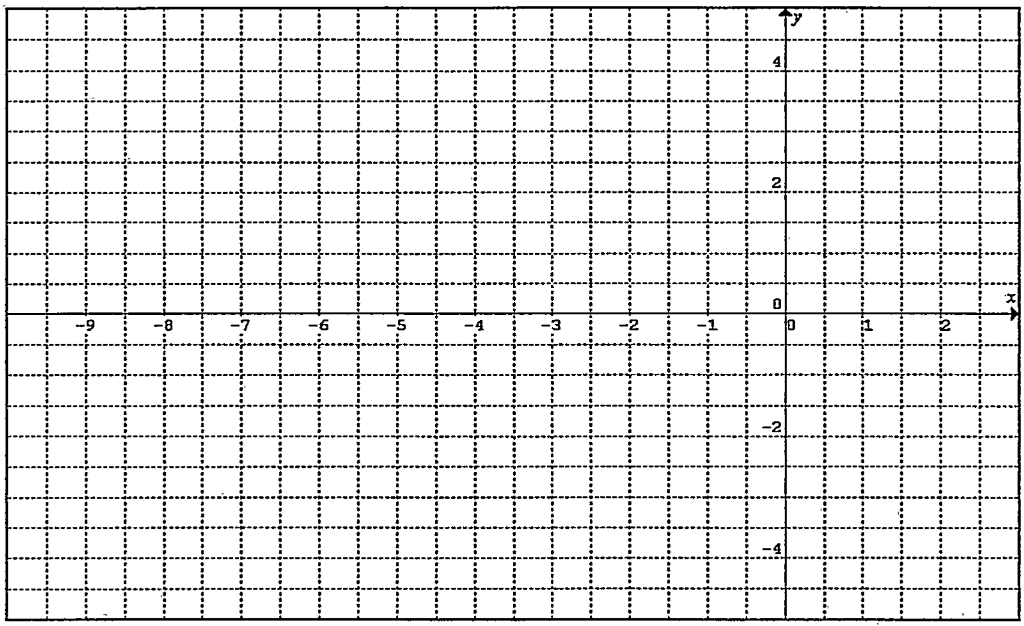


Gráfica de la función

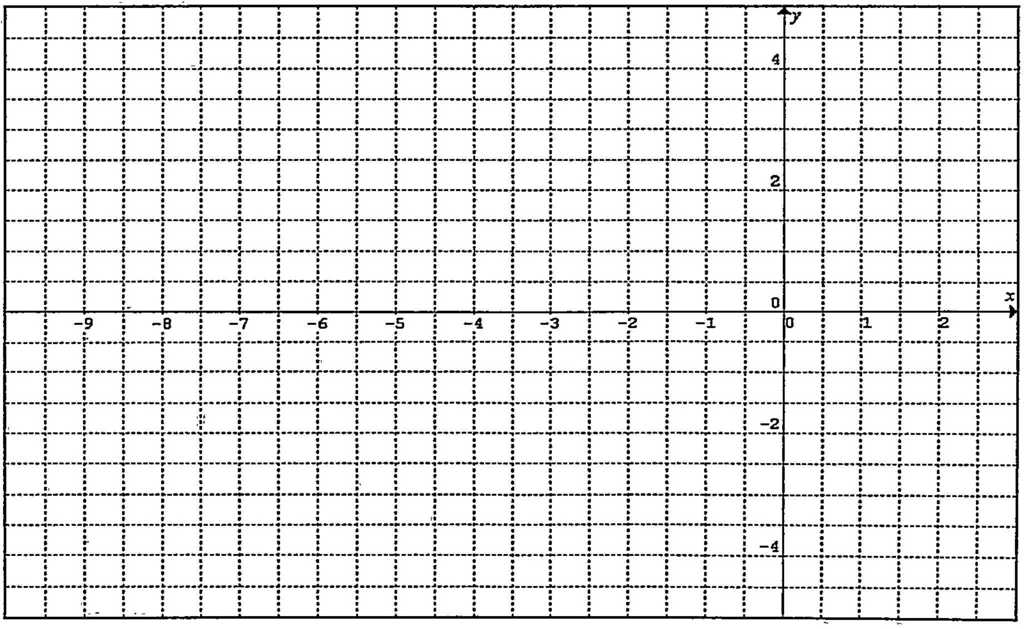


k) $f(x) = \sqrt{-x+1}$

Bosquejo de la gráfica

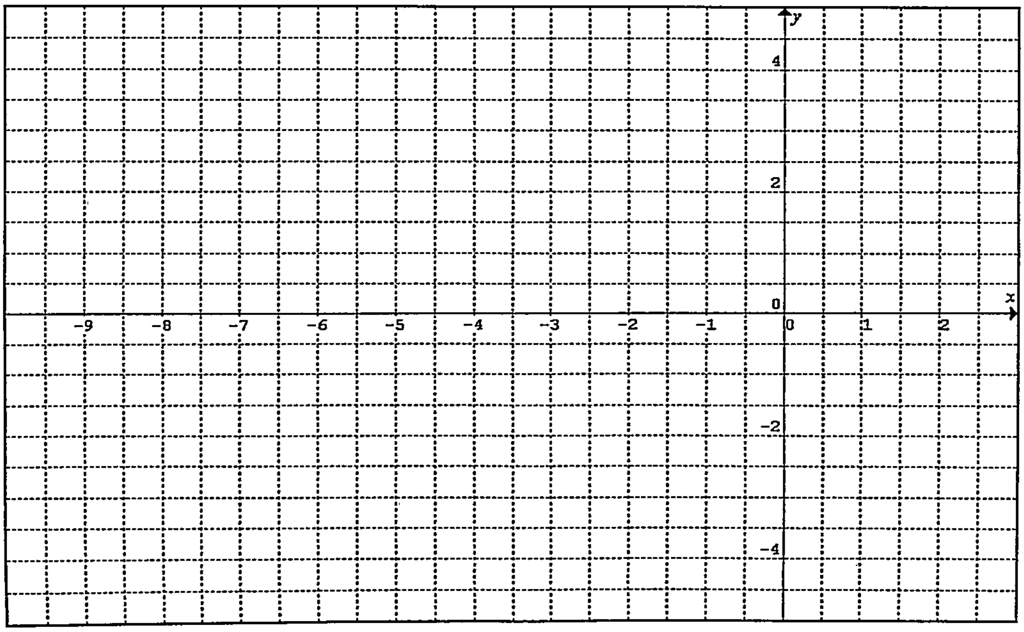


Gráfica de la función

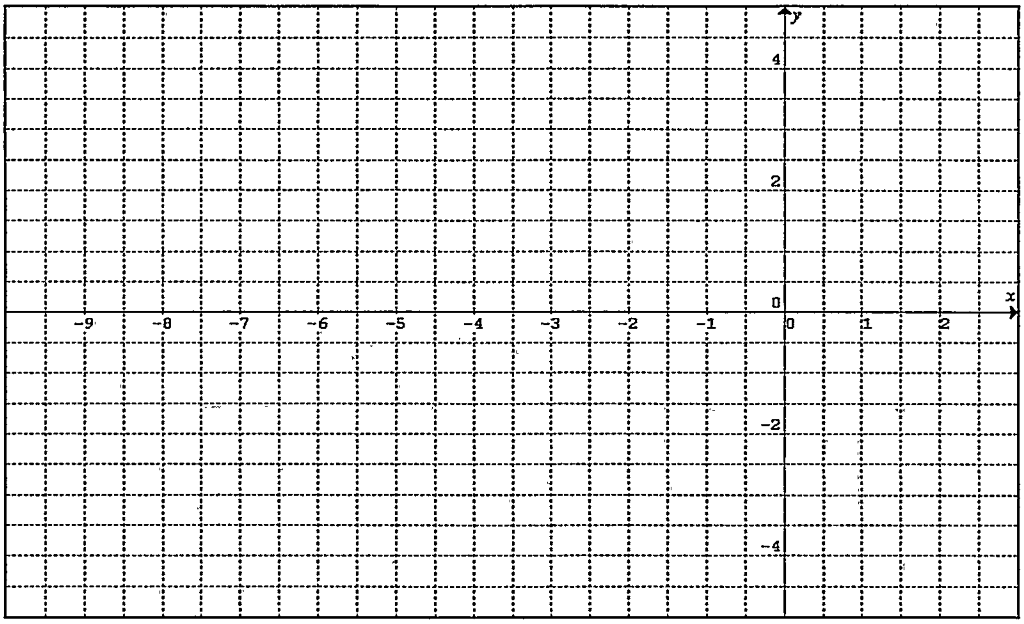


m) $f(x) = -\sqrt{-x-1} + 1$

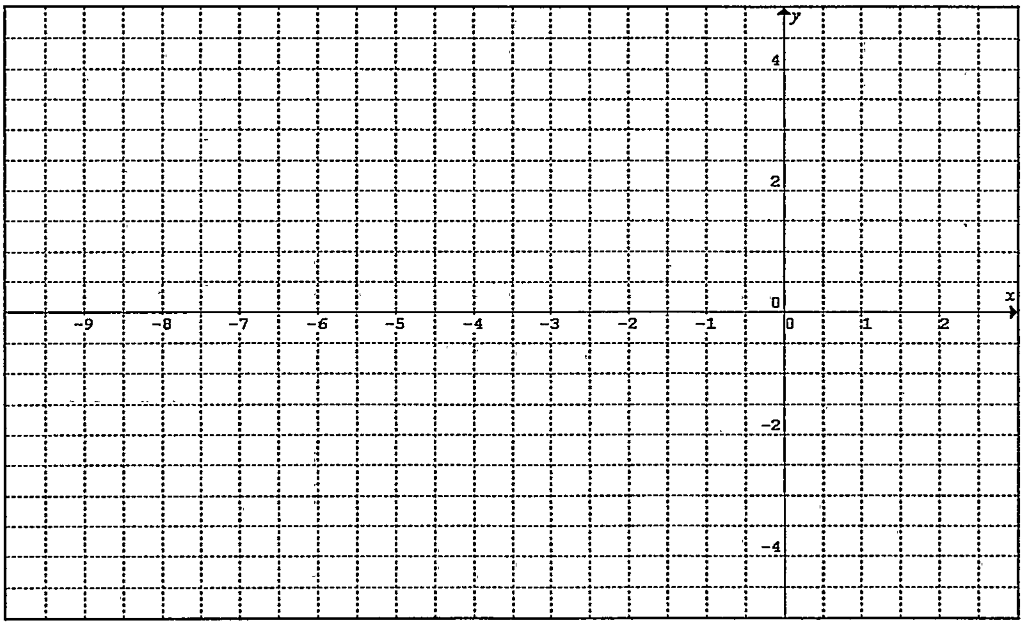
Bosquejo de la gráfica



Bosquejo de la gráfica



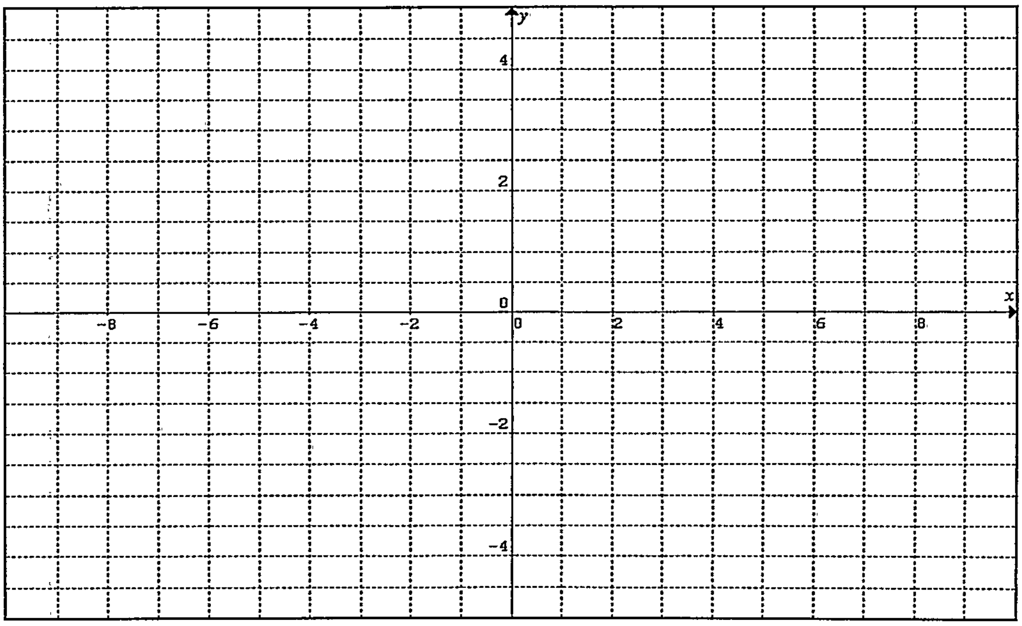
Gráfica de la función



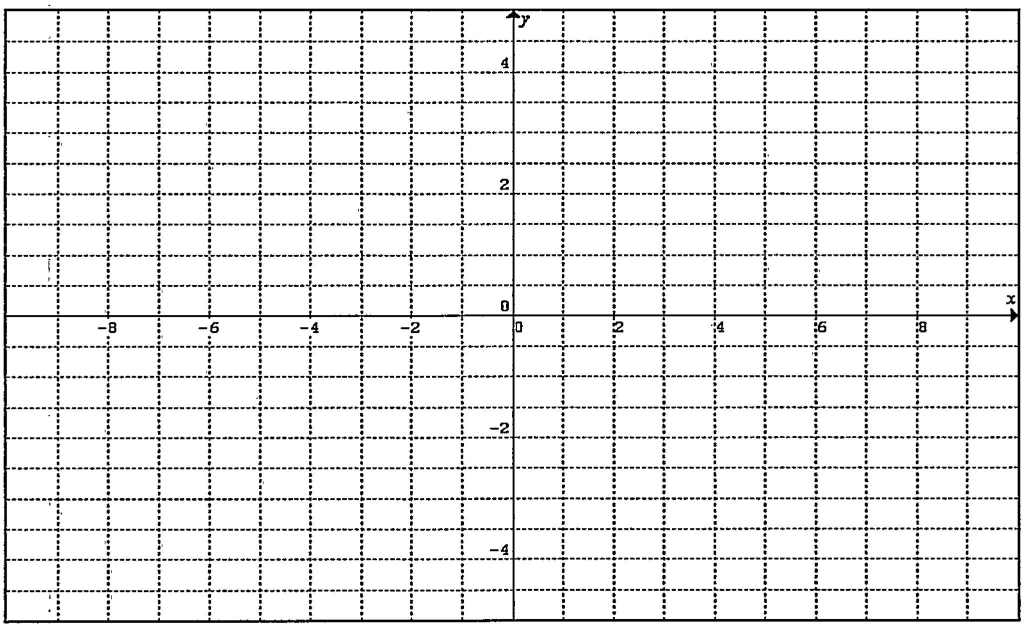
Calcule los interceptos, dominio y rango de la función f, tal que $f(x)=\sqrt{|x|}$

Calcule los interceptos, dominio y rango de la función f, tal que $f(x)=\sqrt{|x|}-2$

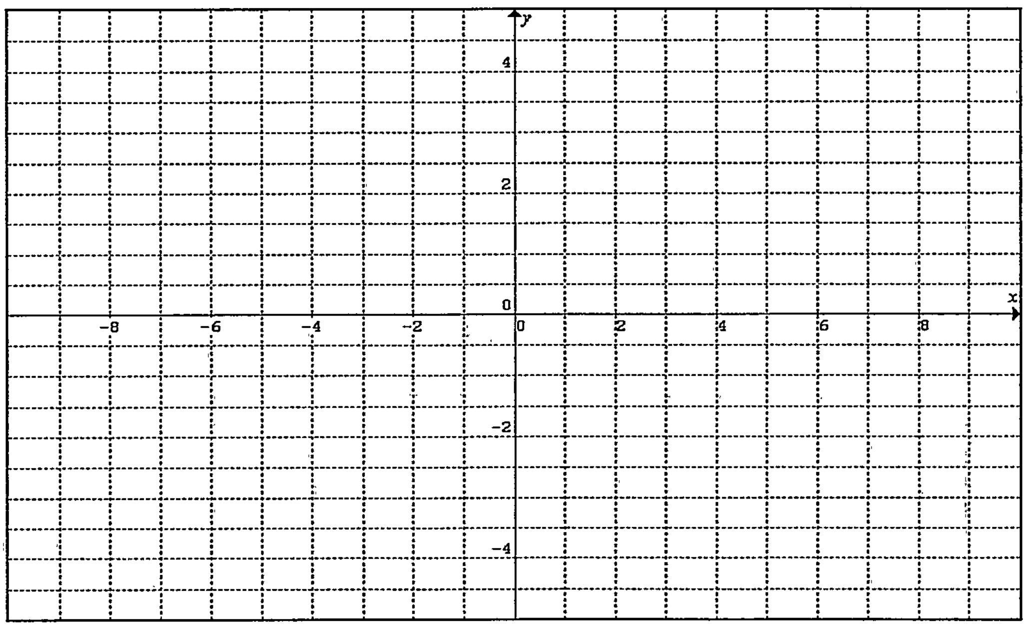
Bosquejo de la gráfica



Bosquejo de la gráfica

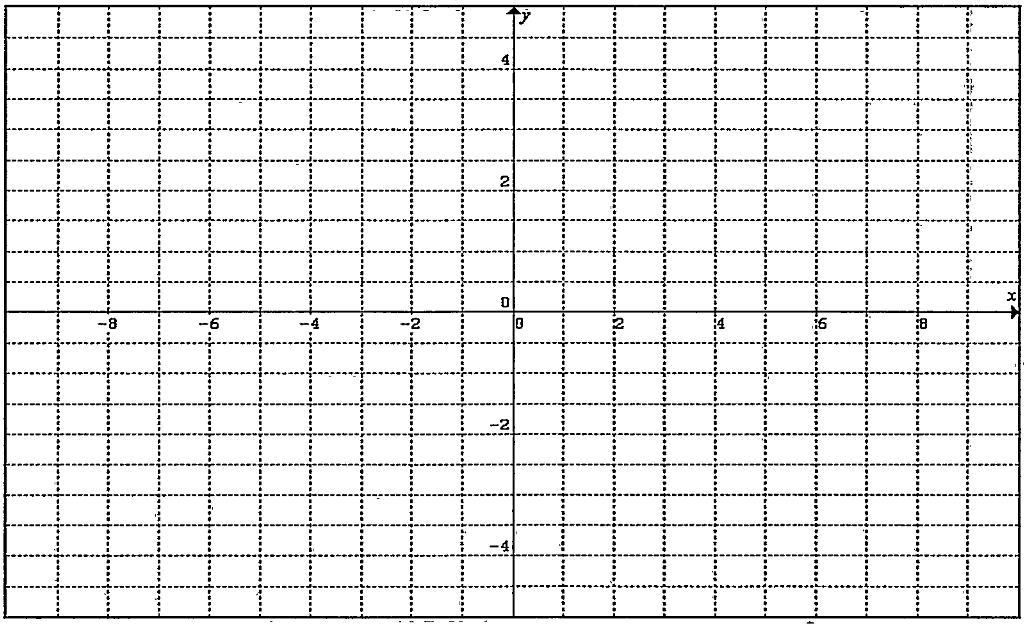


Gráfica de la función



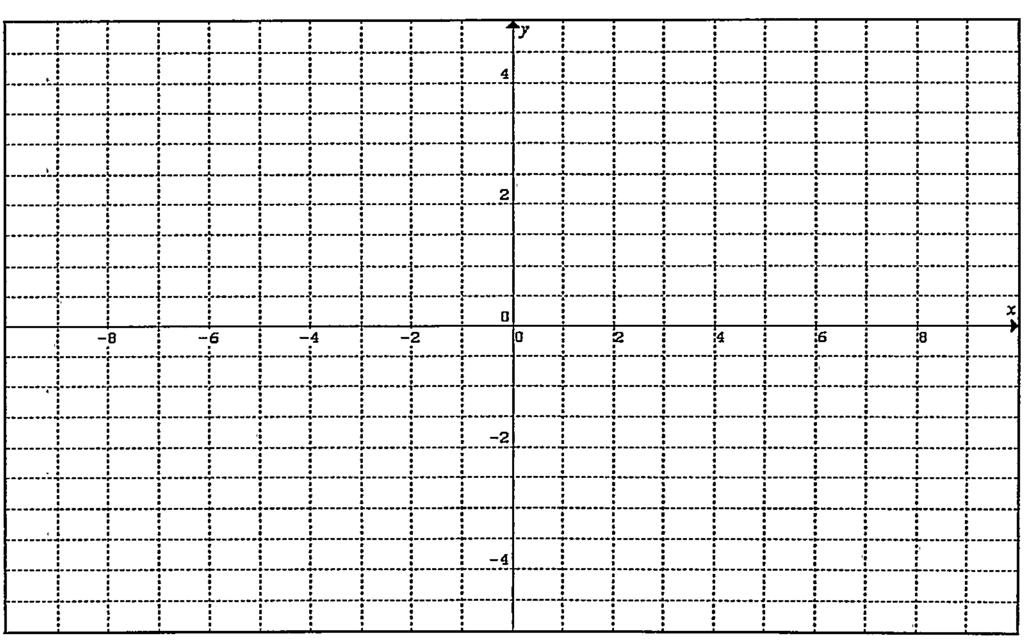
Calcule los interceptos, dominio y rango de la función *f*, tal que $f(x) = \left|\sqrt{|x|} - 1.5\right|$

Gráfica de la función



Calcule los interceptos, dominio y rango de la función *f*, tal que $f(x)=\sqrt{|x-1|}$

Bosquejo de la gráfica

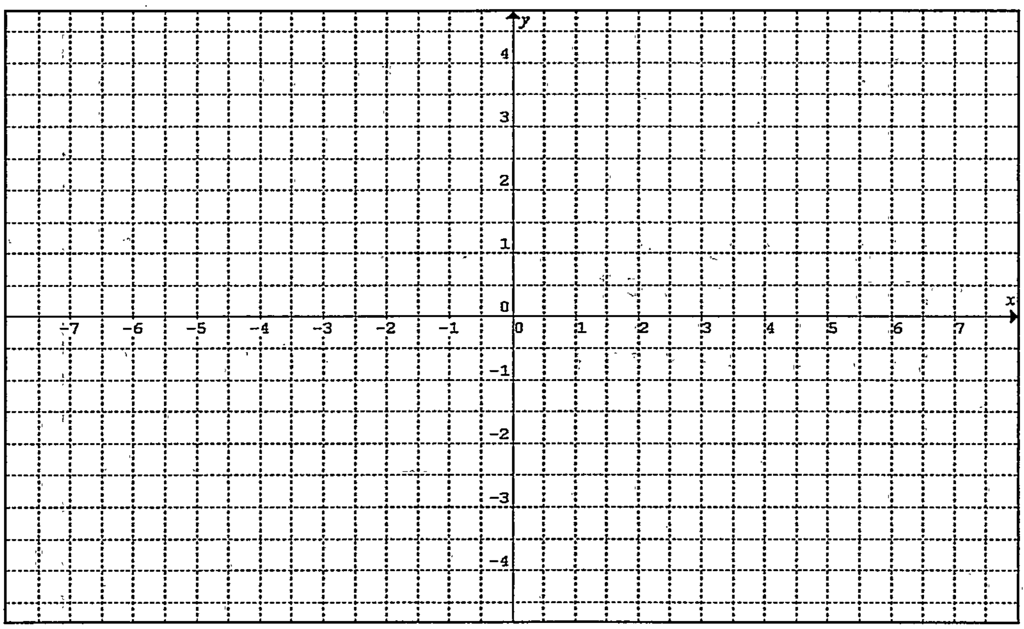


Función por partes

Sea f una función tal que $f(x) = -x + 1$ pero definida para $x \in (-\infty, 0]$ y $f(x) = -2$ pero definida para $x \in (0, +\infty)$. Es decir, f tiene diferentes reglas de correspondencia para distintos intervalos de su dominio.

Describa los pasos necesarios para graficar esta función en el plano cartesiano

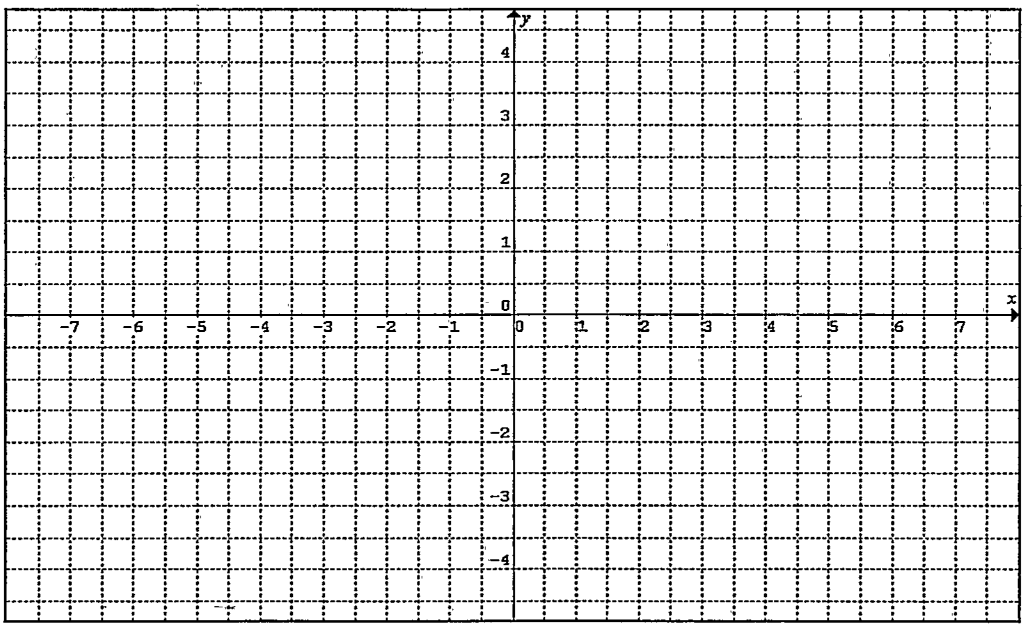
Grafique esta función



Una función como esta recibe el nombre de ***función por partes o función a trozos***.

¿Cuál es la característica esencial de esta función?

Grafique y analice la relación $R(x)=\left\{\begin{matrix} x^2, & x<2 \\ -1, & x>1 \end{matrix}\right\}$

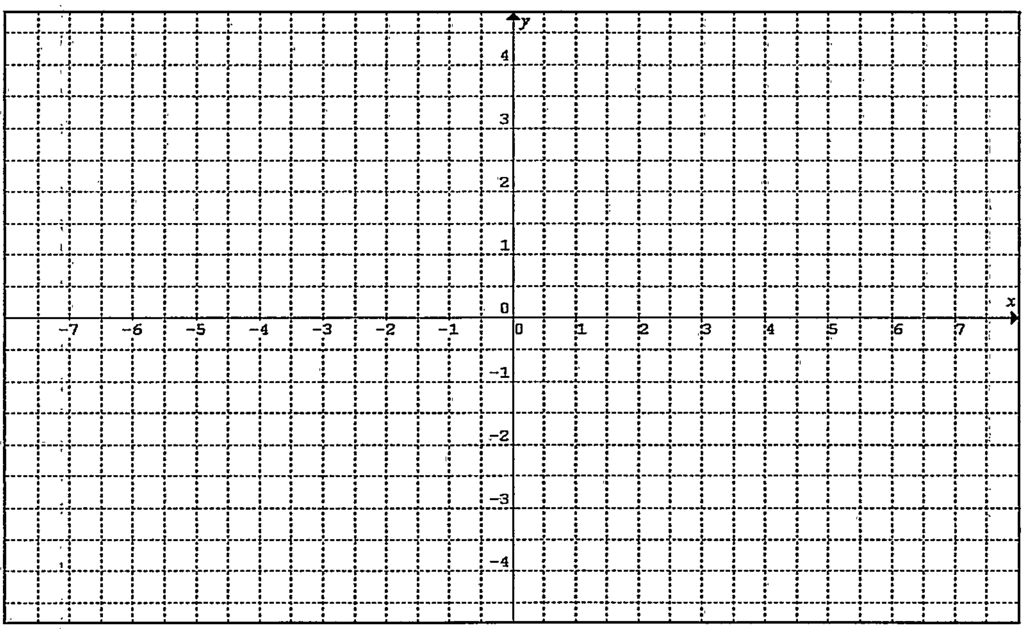


¿Es fución? Justifique su respuesta

Atención

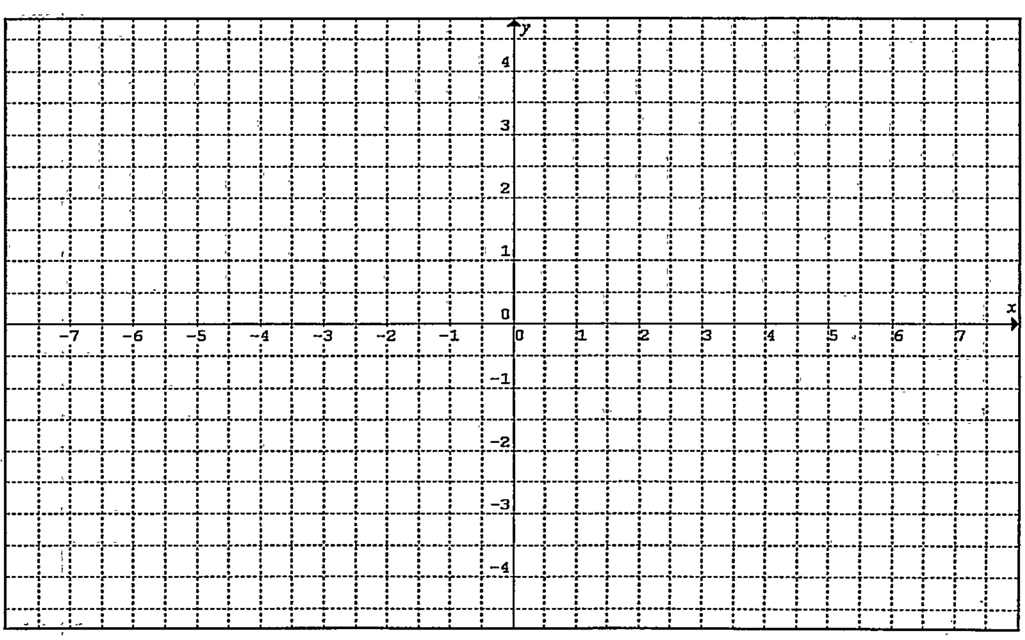
- ✓ *En una función por partes, los intervalos de cada regla de correspondencia deben ser disjuntos (intersección vacía)*
- ✓ No debe haber montaje de gráficas

$$h(x) = \begin{Bmatrix} 2x, & x \neq 2 \\ 3, & x = 2 \end{Bmatrix}$$



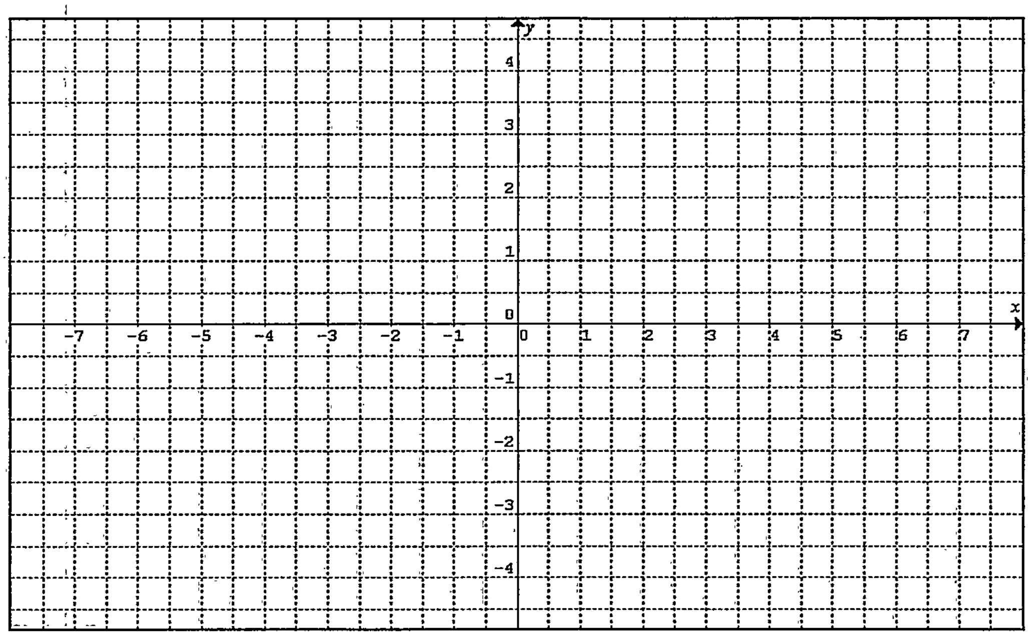
$Dom =$ $Rang =$

$$j(x) = \begin{Bmatrix} |x|-1, & x < 1 \\ |x|+2, & x \geq 1 \end{Bmatrix}$$



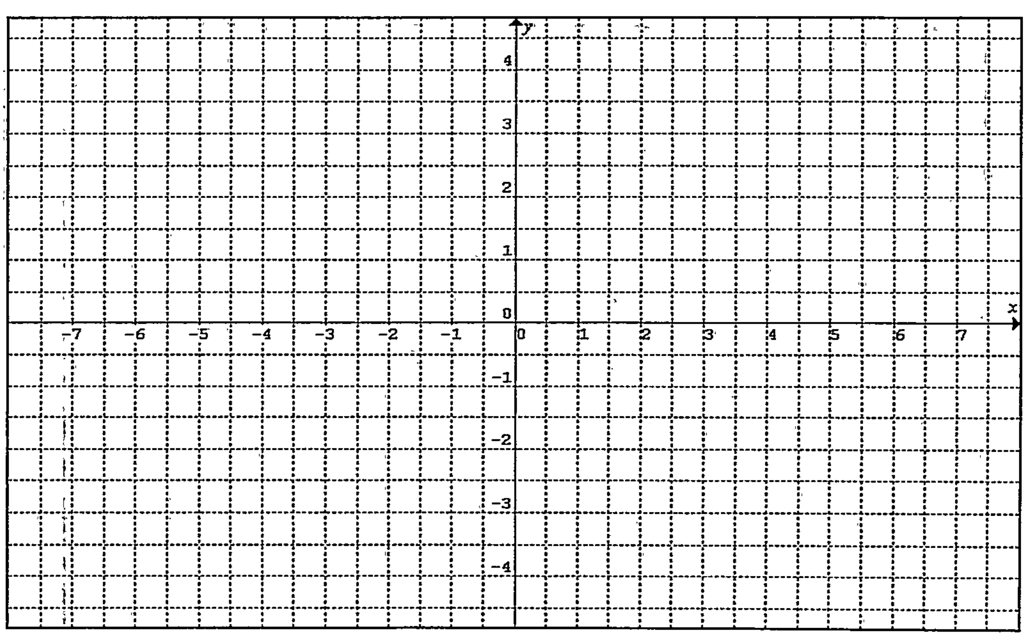
$Dom =$ $Rang =$

$$p(x)=\begin{Bmatrix} x^2, & x<0 \\ 2, & x=0 \\ 2x+1, & x>0 \end{Bmatrix}$$



$Dom =$ $\qquad$ $Rang =$

$$q(x)=\begin{Bmatrix} -x+1, & -1\le x<1 \\ 2, & x=1 \\ x^2, & x>1 \end{Bmatrix}$$

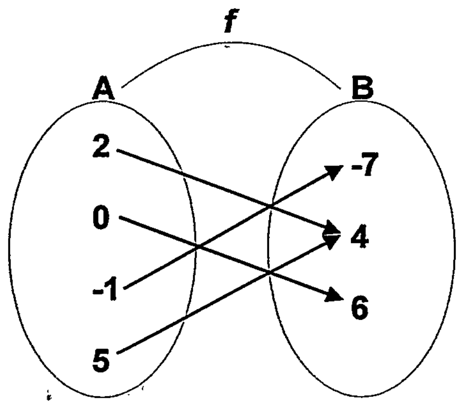


$Dom =$ $\qquad$ $Rang =$

Inversa de una función f: f^{-1}

Para calcular la inversa de una función, realice la siguiente tarea:

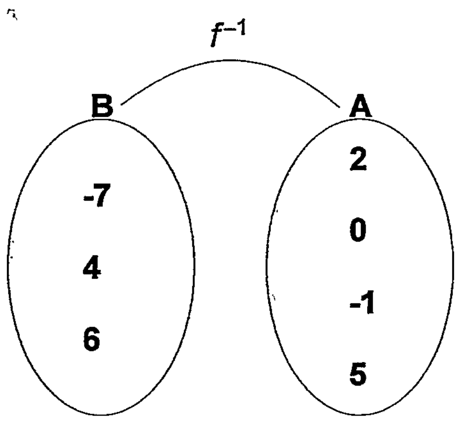
1. Sea $f: A \rightarrow B$, tal que:



a) Describa los elementos de la función como un conjunto de pares ordenados

____

b) ¿Es posible construir una función $f^{-1}: B \rightarrow A$, es decir, una función en la que el dominio de f sea el rango de f^{-1} y el rango de f sea el dominio de f^{-1}? Justifique su respuesta.

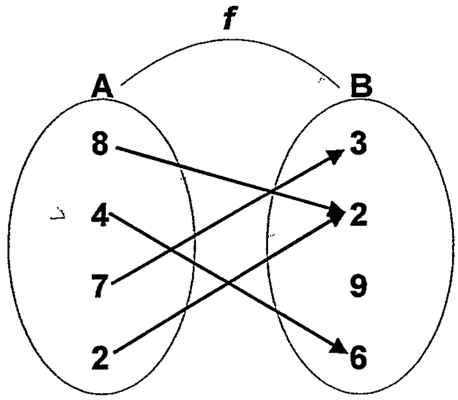


____

c) Describa los elementos de la función f^{-1} como un conjunto de pares ordenados

____

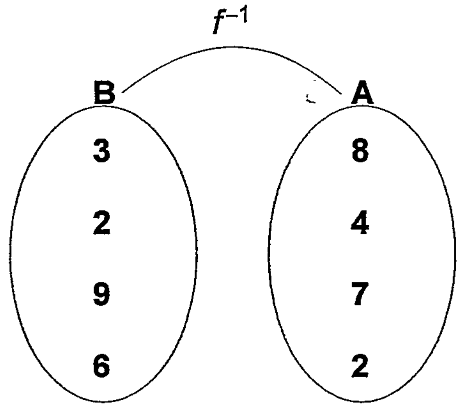
3. Sea $f: A \to B$, tal que:



a) Describa los elementos de la función cómo un conjunto de pares ordenados

---

b) ¿Es posible construir una función $f^{-1}: B \to A$, es decir, una función en la que el dominio de f sea el rango de f^{-1} y el rango de f sea el dominio de f^{-1}? Justifique su respuesta.



---

c) Describa los elementos de la función f^{-1} como un conjunto de pares ordenados

---

Indique una característica de la función con la que se pudo construir la función f^{-1}

____

Cualquier función con la caracterísica anterior se dice que ***tiene inversa*** o que ***es invertible***. La inversa de una función f se la representa por f^{-1}.

Atención

$$f^{-1} \neq \frac{1}{f}$$

f^{-1} es el símbolo para representar la inversa de la función f, no significa la recíproca de f.

Sea $g: \{3, 0, 5, 1\} \rightarrow \{4, 1, -2, 2\}$ tal que, $g = \{(3,4); (0,1); (5,-2); (1,2)\}$.

¿Tiene g inversa? Justifique su respuesta

____

Calcule g^{-1}

____

¿Cómo se calculó g^{-1} (la inversa de g) ?

____

Describa de manera formal una regla para determinar cuándo una función tiene inversa y cómo calcularla.

____

____

____

Resuelva los siguientes ejercicios:

1. Sea f una función tal que $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ con $f(x)=2+x$. Encuentre su inversa si existe.

¿Qué condición debe cumplir para ser invertible?

____

Compruebe que sí es invertible:

Cálculo de su inversa:

¿Cómo se calcula la inversa de una función?

____

Nuestra función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ con $f(x)=2+x$, tiene infinitos pares ordenados, ¿cómo encontrar su inversa? ¿es posible aplicar la regla anteriormente deducida?. Si es posible, ensaye un procedimiento para aplicarla; halle f^{-1}.

____

____

____

2. Sea f una función tal que $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ con $g(x)=\frac{3x-1}{2}$. Encuentre su inversa si existe.

¿Qué condición debe cumplir para ser invertible?

Compruebe que sí es invertible:

Cálculo de su inversa:

¿Cómo se calcula la inversa de una función?

Nuestra función $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ con $g(x)=\frac{3x-1}{2}$, tiene infinitos pares ordenados, ¿cómo encontrar su inversa? ¿es posible aplicar la regla anteriormente deducida?. Si es posible, ensaye un procedimiento para aplicarla; halle f^{-1}.

Describa una regla para calcular la inversa de una función cuando ésta viene dada por su regla de correspondencia.

____

____

____

____

A continuación se presenta un ejercicio resuelto, en el que se calcula la inversa de una función. Escriba cada uno de los pasos del proceso.

Sea $h:[0,+\infty)\rightarrow[-3,+\infty)$ con $h(x)=4x^2-3$, una función biyectiva. Halle su inversa

Como se sabe,

$$y=h(x)$$

$$y=4x^2-3$$ _______________________

$$y+3=4x^2$$

$$\frac{y+3}{4}=x^2$$

$$x=\sqrt[2]{\frac{y+3}{4}}$$

____

$$y^{-1}=\sqrt[2]{\frac{x+3}{4}}$$

$$h^{-1}=\sqrt[2]{\frac{x+3}{4}}$$

____

2. $g(x)=\dfrac{4x+3}{5+x}$

a) Cambie de variable: ______________________________

b) Despeje la variable independiente *x* (dominio)

c) Cambie el nombre de la variable: ______________________________

d) Exprese la respuesta: ______________________________

5.1 Relación geométrica entre las gráficas de una función y su inversa

Complete la siguiente tabla para la función $f(x) = x^3$:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y									

Calcule la inversa f^{-1} de la función anterior

$$f(x) = x^3$$

$$y = x^3$$

$$\sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x^3}$$

$$\sqrt[3]{y} = x$$

Su inversa es:

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$$

Complete la siguiente tabla para la función $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$:

x	-64	-27	-8	-1	0	1	8	27	64
y									

Compare las coordenadas correspondientes de ambas funciones

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y									
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
x	-64	-27	-8	-1	0	1	8	27	64
y									

¿Qué se puede concluir a partir de esta comparación?

___

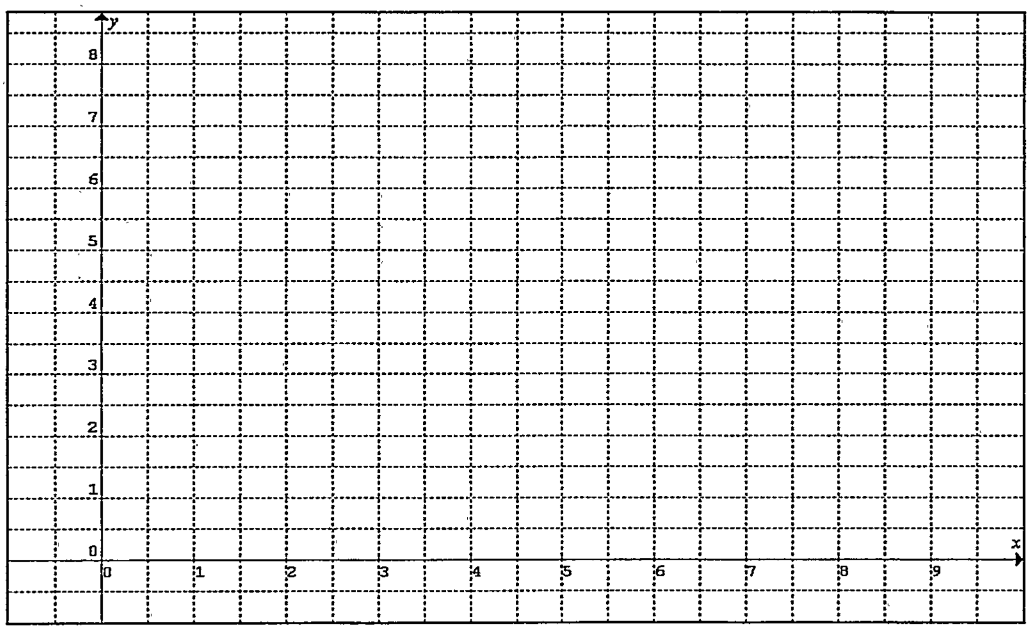
___

___

Grafique cada función, su inversa y la función identidad en el mismo plano cartesiano:

1. $f: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to [1, +\infty)$; $f(x) = x^2 + 1$

Calcule f^{-1}



Calcule el dominio y el rango de f^{-1}

$Dom\, f^{-1} =$ ____________________ $Rang\, f^{-1} =$ ____________________

¿Qué papel desempeña la gráfica de la función identidad respecto de las gráficas de las funciones f y f^{-1}?

¿La relación geométrica entre las gráficas de una función f, su inversa f^{-1} y la función identidad $f^{-1}(x)$ se cumplirá para cualquier función f ? Justifique su respuesta.

____

____

Describa una regla que determine esta relación geométrica

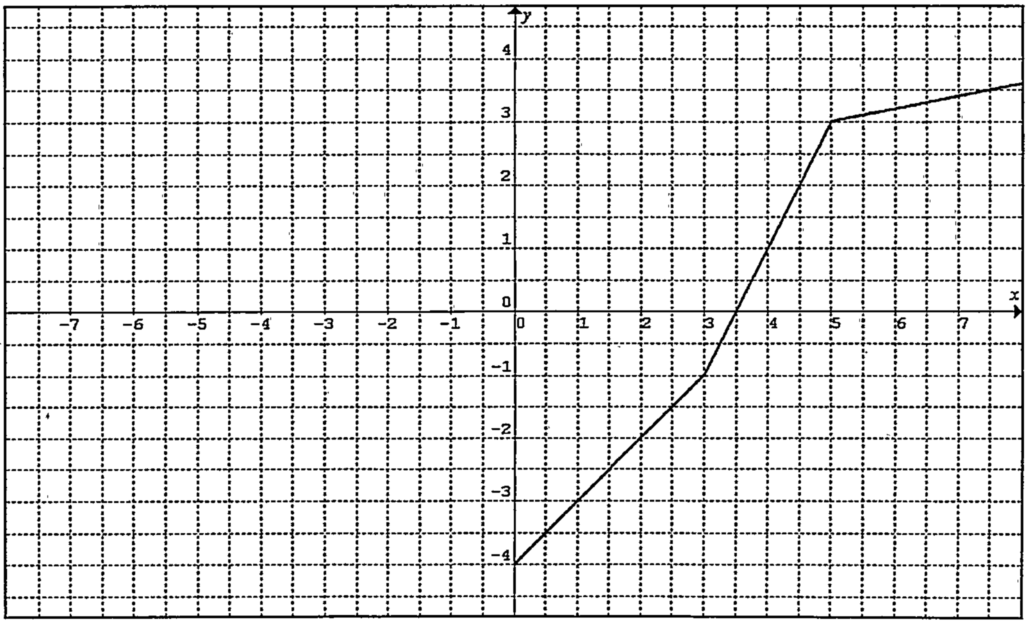
____

____

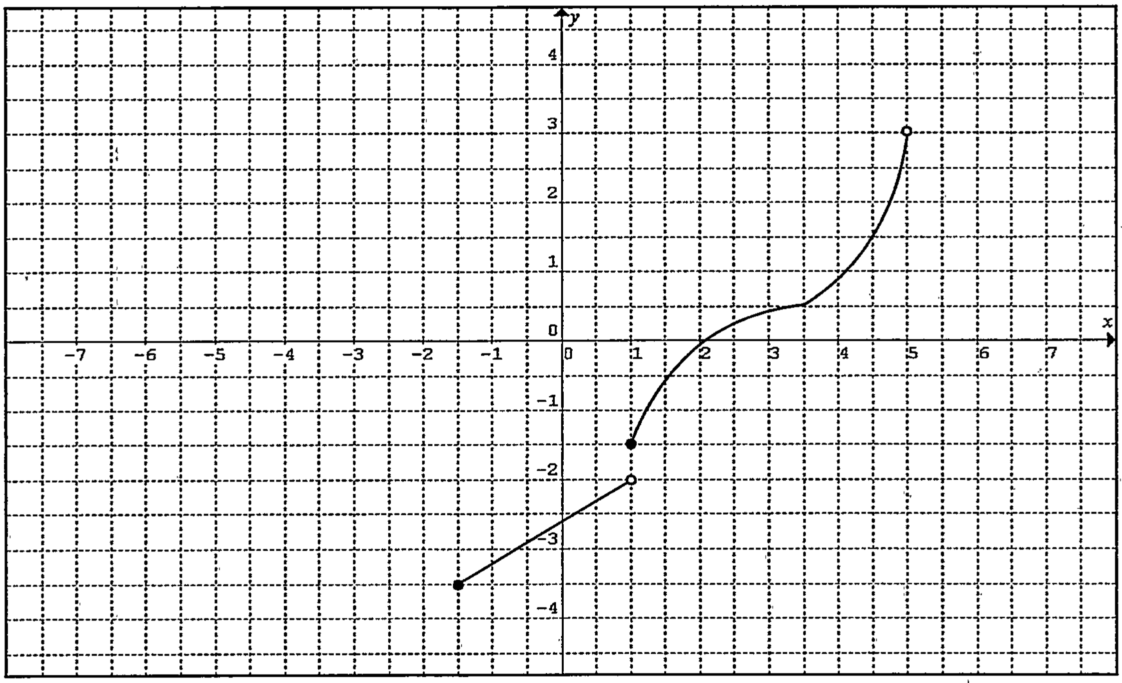
____

A continuación se presentan las gráficas de varias funciones. Dibuje en el mismo plano cartesiano la gráfica de su inversa respectiva.

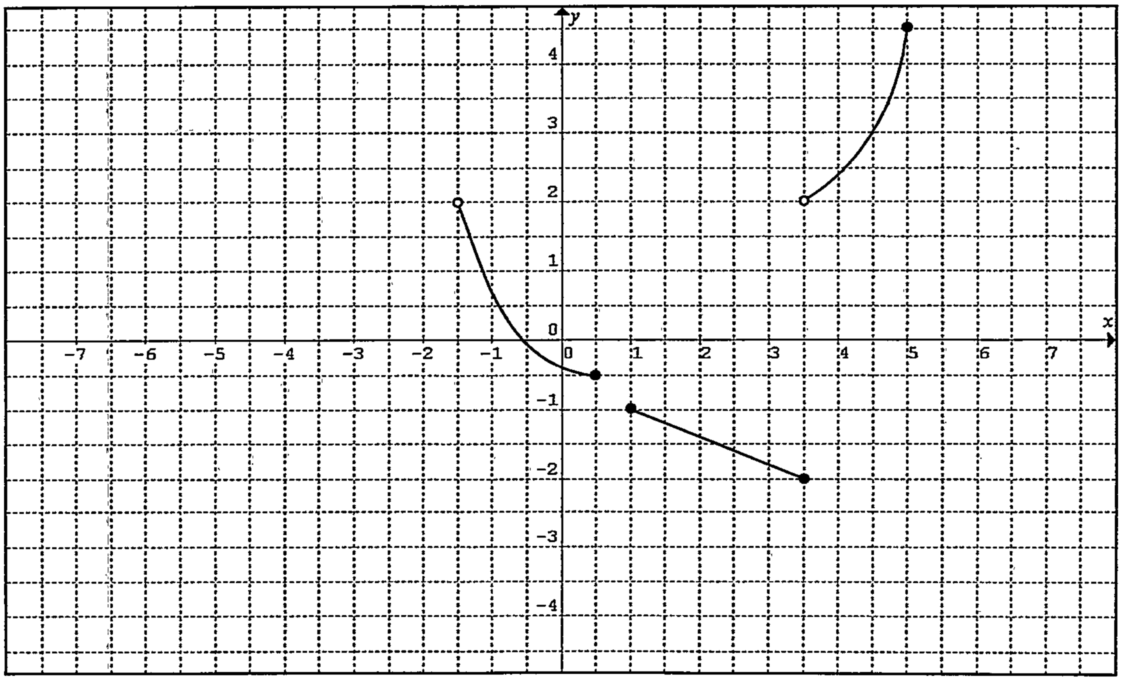
1. Gráfica de f y f^{-1}



4. Gráfica de z y z^{-1}



5. Gráfica de p y p^{-1}



Función polinómica

Ayuda memoria

Definición de polinomio:

Un polinomio es una expresión algebraica de la forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0; \text{ donde } a_i \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$$

n es el grado del polinomio.

Ejemplos:

Polinomio	Coeficientes	Grado
$2x^4 - 8x^2 + x - 1$	2,8,1,-1	4
$x^2 - 1$	1,-1	2
3	3	0
0	0	No tiene grado

Ejemplos de expresiones algebraicas que no son polinomios:

$$\frac{1}{x^2-2},\ x^{1/3} + 4x^2 - 1,\ 3x^{-6} + 2x^4 - 3x^3 + x^2 + 1,\ x^5 - 2\sqrt{x} + 3,\ \frac{2}{3}x^{-1} + 6x^2 + 2$$

6.1 Función polinómica

Es aquella cuya regla de correspondencia está definida por un polinomio. Se la representa por:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \text{ con } Dom = \{x / x \in \mathbb{R}\}$$

El grado de la función polinómica es el grado del polinomio, es decir el mayor exponente de la variable x.

Algunas funciones estudiadas anteriormente son polinómicas. Por ejemplo:

Función	Nombre	Características
$f(x) = a_0$	F. constante	Recta horizontal pasa por $y = a_0$
$f(x) = x$	F. identidad	Biseca el 1er y 3er cuadrante, pasa por $y = 0$
$f(x) = a_1 x + a_0$	F. lineal	Recta oblicua de pendiente a_1 pasa por $y = a_0$
$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$	F. cuadrática	Parábola hacia arriba $a_2 > 0$ o abajo $a_2 < 0$
$f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$	F. cúbica	Parábola cúbica

Ejemplo 2: $q(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$, entonces $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

$$(x-1)(x+1)(x-2) = 0$$

$$x - 1 = 0 \;\vee\; x + 1 = 0 \;\vee\; x - 2 = 0$$

$$x = 1 \;\vee\; x = -1 \;\vee\; x = 2$$

$$I_{1x}: (1, 0);\; I_{2x}: (-1, 0);\; I_{3x}: (2, 0)$$

Ejemplo 3: $r(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1$, entonces $x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = 0$

$$(x+1)\left(x + \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = 0$$

$$x + 1 = 0 \;\vee\; x + \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0 \;\vee\; x + \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 0$$

$$x = -1 \;\vee\; x = -\frac{3-\sqrt{5}}{2} \;\vee\; x = -\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$I_{1x}: (-1, 0);\; I_{2x}: \left(-\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 0\right);\; I_{3x}: \left(-\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 0\right)$$

Ejemplo 4: $s(x) = x^3 + x$, entonces $x^3 + x = 0$

$$x(x^2 + 1) = 0$$

$$x = 0 \;\vee\; x^2 + 1 \neq 0$$

$$I_x: (0, 0)$$

Si x_i es una raíz de f, entonces $(x - x_i)$ es un factor de la función polinómica.

Ejemplo 5: $t(x) = x^2 + x + 1$, entonces $x^2 + x + 1 = 0$

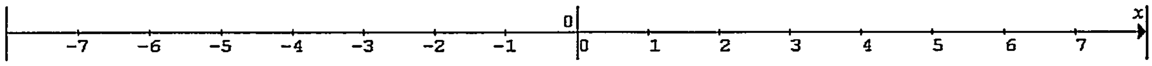
$$\left(x + \frac{1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)\left(x + \frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right) = 0$$

Las raíces no son reales, por lo tanto no tiene ceros, o sea la función no se intercepta con el eje x.

Ejemplo 6: $t(x) = x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 1$, entonces $x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 1 = 0$

b) Escoja a priori puntos de prueba cercanos a los ceros; antes y después de ellos y determine el signo de sus imágenes.

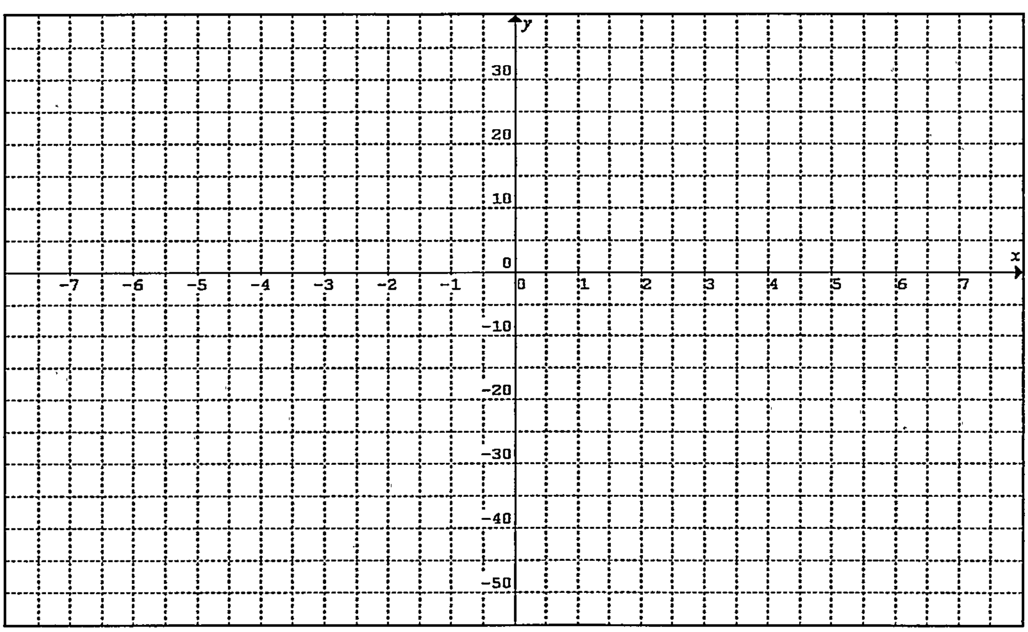
Grafique los ceros de *f* en la recta numérica:



Complete la siguiente tabla:

Intervalo			
Número de prueba			
Imagen del punto de prueba			
Coordenadas del punto			
Localización del punto respecto del eje x (arriba o abajo)			

c) Grafique la función utilizando la información anterior:

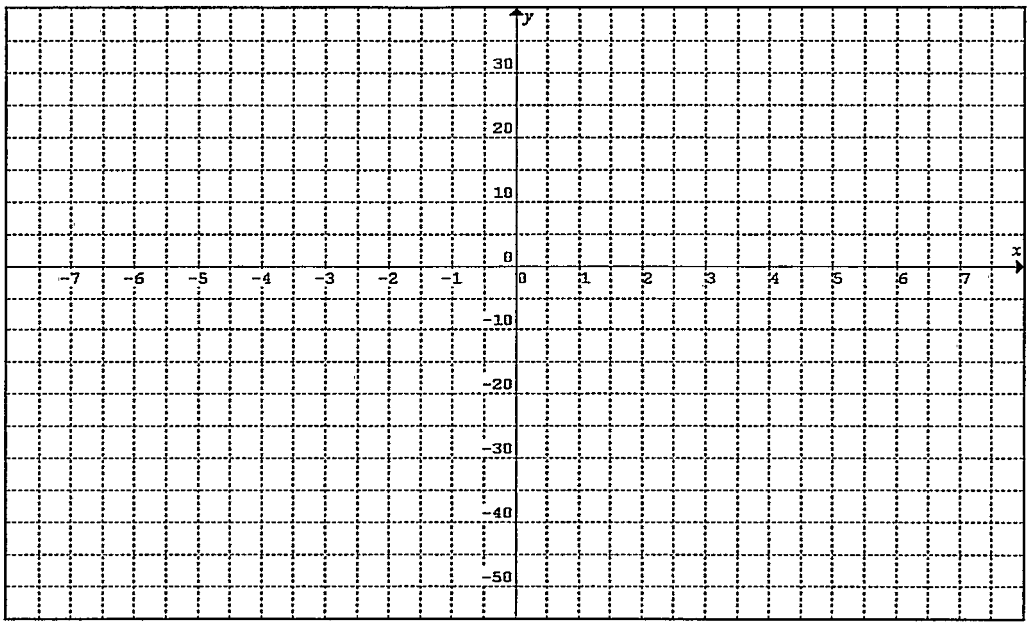


Hay funciones en las que las imágenes antes y después de un cero no cambian de signo; en cuyo caso por dicho cero, la gráfica no cruza el eje *x*, sólo lo toca. En los alrededores del cero, a gráfica puede estar sobre el eje *x* o debajo del mismo.

Complete la siguiente tabla:

Intervalo			
Número de prueba			
Imagen del punto de prueba			
Coordenadas del punto			
Localización del punto respecto del eje x (arriba o abajo)			

c) Grafique la función utilizando la información anterior:



6.3 Multiplicidad de un cero de una función polinomial

Sea f una función tal que $f(x)=(x+2)^3(x-1)^2$, aplicando la propiedad de las potencias, f puede ser escrita en la forma $f(x)=(x+2)(x+2)(x+2)(x-1)(x-1)$; al calcular los ceros se tiene:

$$(x+2)(x+2)(x+2)(x-1)(x-1)=0$$

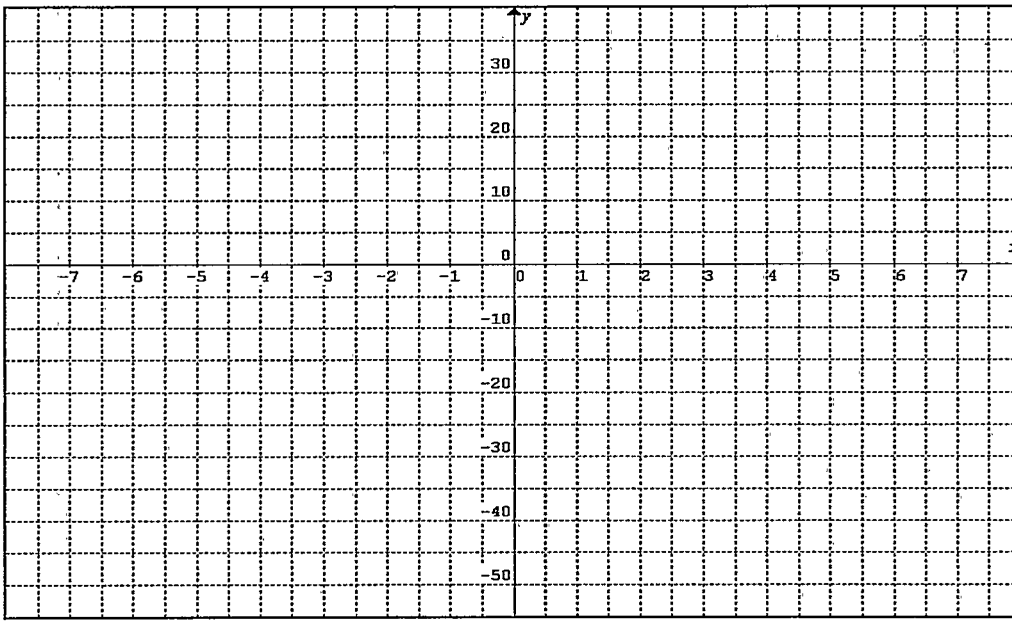
$$(x+2)=0 \vee (x+2)=0 \vee (x+2)=0 \vee (x-1)=0 \vee (x-1)=0$$

$$x=-2 \vee x=-2 \vee x=-2 \vee x=1 \vee x=1$$

Como se puede apreciar, el cero -2 que se obtiene de $(x+2)^3$ se repite ***tres*** veces; se dice que -2 es un cero de ***multiplicidad*** 3.

Así mismo, el cero 1 que se obtiene de $(x-1)^2$ se repite ***dos*** veces; se dice que 1 es un cero de ***multiplicidad*** 2.

c) Grafique la función utilizando la información anterior:



d) Complete la siguiente tabla:

Factor de f	Exponente del factor	¿Exponente par o impar?	Toca al eje x	Toca al eje y

2. Dada la función f tal que $f(x)=(1-x)(x+1)^2$

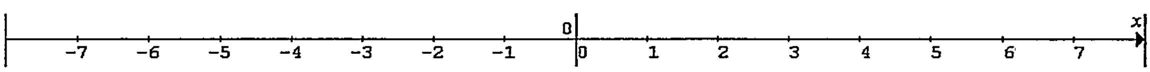
a) Calcule los ceros de la función:

3. Dada la función f tal que $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$

a) Calcule los ceros de la función:

b) Escoja a priori puntos de prueba cercanos a los ceros; antes y después de ellos y determine el signo de sus imágenes.

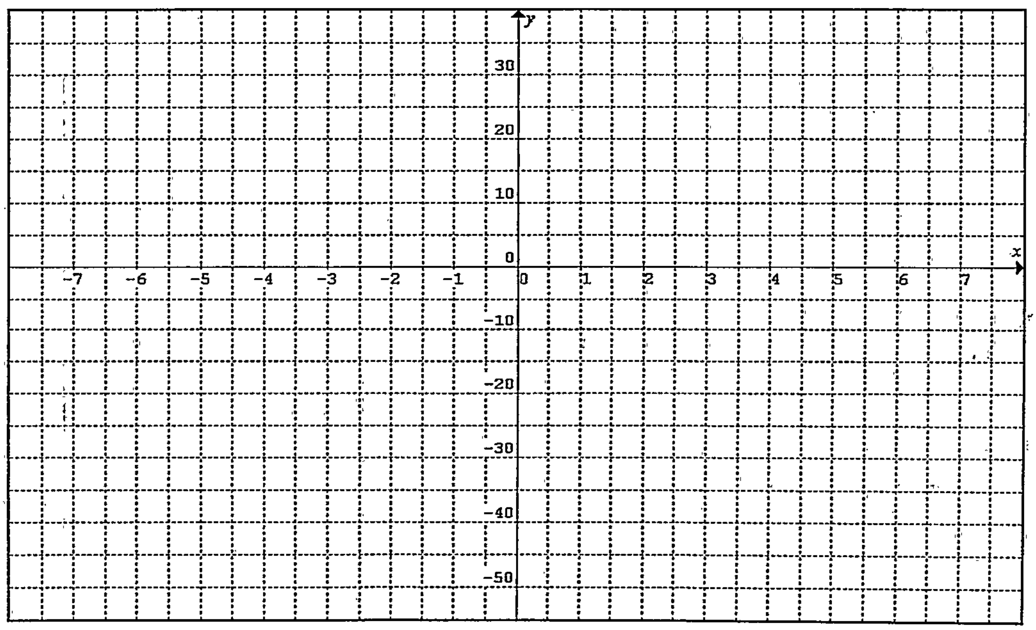
Grafique los ceros de *f* en la recta numérica:



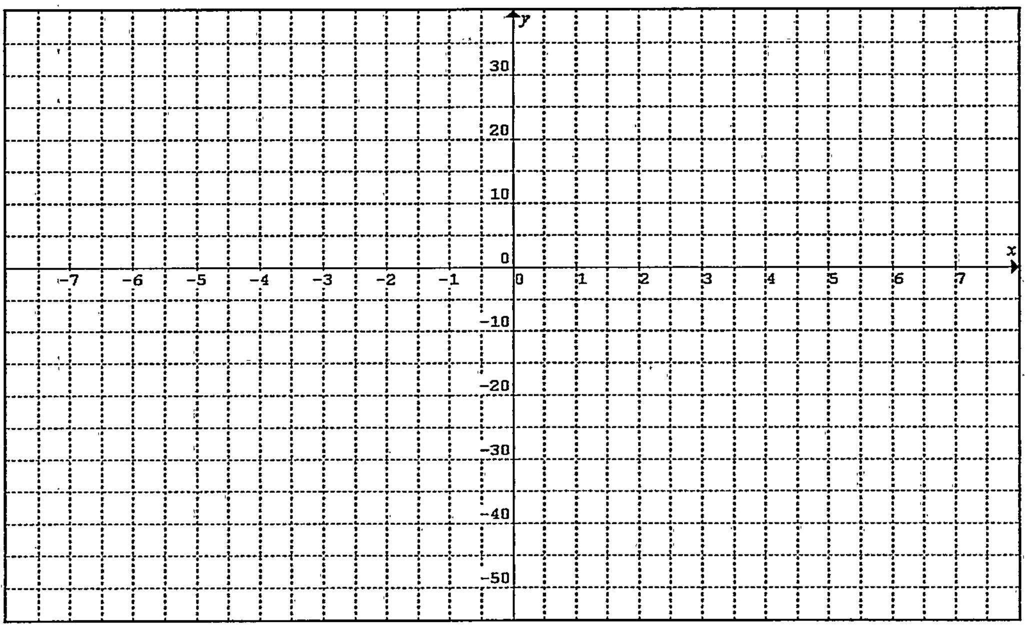
Complete la siguiente tabla:

Intervalo			
Número de prueba			
Imagen del punto de prueba			
Coordenadas del punto			
Localización del punto respecto del eje x (arriba o abajo)			

c) Grafique la función utilizando la información anterior:



c) Grafique la función utilizando la información anterior:



d) Complete la siguiente tabla:

Factor de f	Exponente del factor	¿Exponente par o impar?	Toca al eje x	Toca al eje y

5. Dada la función f tal que $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$

a) Calcule los ceros de la función:

Compare la información de la columna tres con los de las columnas cuatro y cinco de los ejercicios anteriores. ¿Qué puede concluir?

____

____

____

Utilice la conclusión anterior para completar la siguiente tabla:

Función polinimoial	Cruza el eje x en:	Toca el eje x en:
$f(x)=(1-x)(x-2)(x+3)$		
$f(x)=x(x+2)^2(x-3)(x+1)$		
$f(x)=x(x-4)^2$		
$f(x)=x^2(x+3)^2$		

Ejercicios

Encuentre los interceptos y grafique las siguientes funciones polinómicas

1. $f(x)=x^3-4x$
2. $f(x)=-2x(x-1)^2$
3. $f(x)=(x^2-1)^2(x-1)$
4. $f(x)=(1-3x)^3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$
5. $f(x)=\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{5}{2}\right)^3$
6. $f(x)=\left(-\frac{2}{3}+2x\right)^2\left(-x-\frac{1}{3}\right)^2$
7. $f(x)=x(1+2x)(x-0.5)^3$
8. $f(x)=(x+4)\left(\frac{3}{5}+x\right)(x-2)^4$
9. $f(x)=x(1+x)^2(x-5)^3(3-x)^5$

Función Racional

7.1 Definición

Se denomina función racional a aquella que está definida por el cociente de dos funcones polinomiales, en tal que el denominador no es el polinomio cero.

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)};\ q(x)\neq 0$$

Ejemplos: $f(x)=\frac{1}{x};\ g(x)=\frac{3}{2x-1};\ h(x)=\frac{x^2-3x}{x+1};\ z(x)=\frac{x^3-2x+1}{3x}$

Ayuda memoria

Los números racionales se clasifican en:

- ✓ los propios, cuando el numerador es menor que el denominador; y
- ✓ los impropios, cuando el numerador es mayor o igual que el denominador

¿Cómo se clasifican las funciones racionales?

¿Cómo diferenciar el tipo de función racional?

Dibuje un esquema que represente la clasificación de las funciones racionales

7.2 Gráfica de una función racional

La función racional más elemental es $f(x)=\frac{1}{x}$. Para saber cómo es su gráfica:

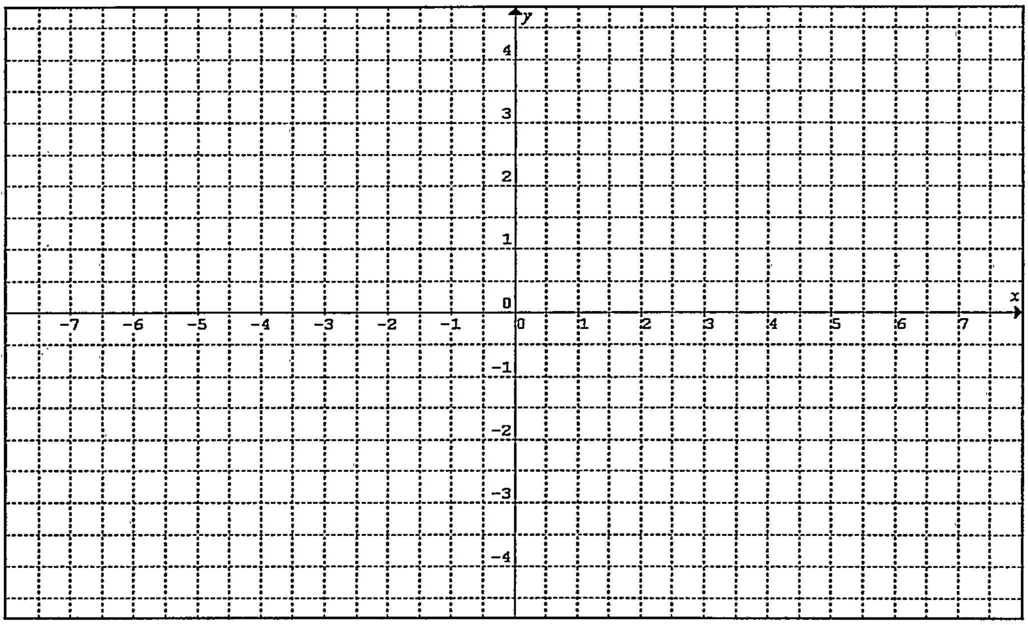
Complete las siguientes tablas.

x	-1.000	-100	-10	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1
y											

x	-0,1	-0,01	0	0	0,001	0,01	0,1	1	2	3
y										

x	8	10	100	1.000
y				

Grafique la función:



Observe las tablas y la gráfica para valores de la abscisa menores de cero.

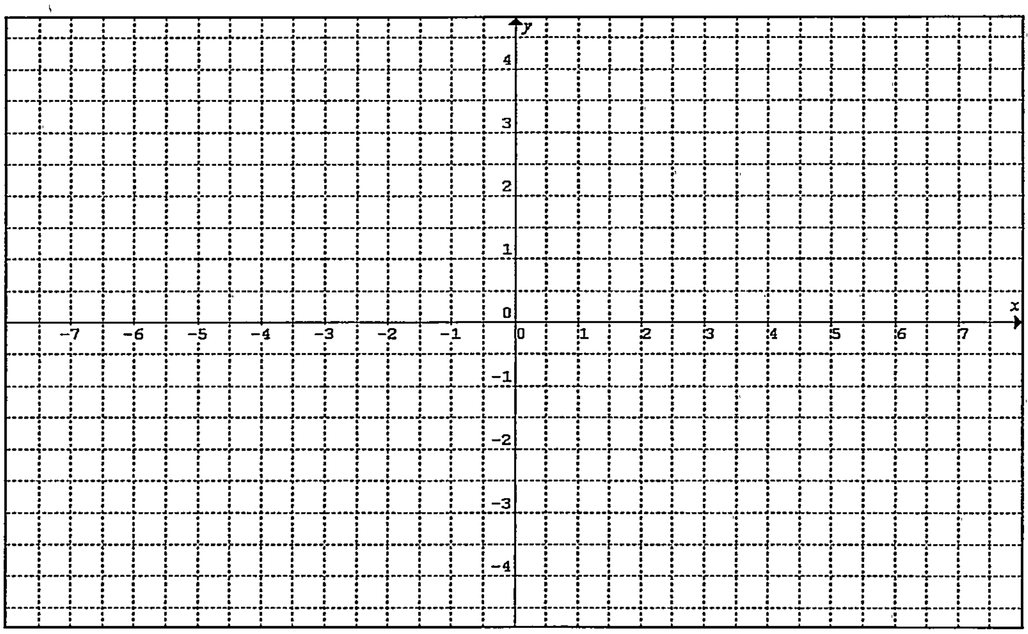
¿Qué ocurre con los valores de sus imágenes cuando nos alejamos del origen hacia la izquierda?

____

____

Grafique las siguientes funciones:

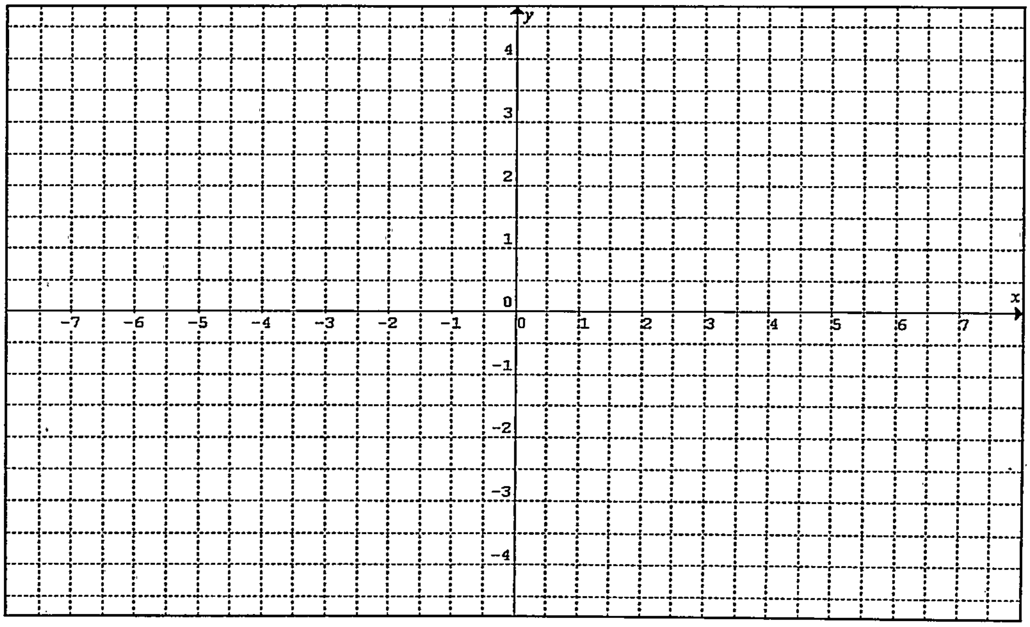
1. $f(x) = -\frac{1}{x}$



Calcule:

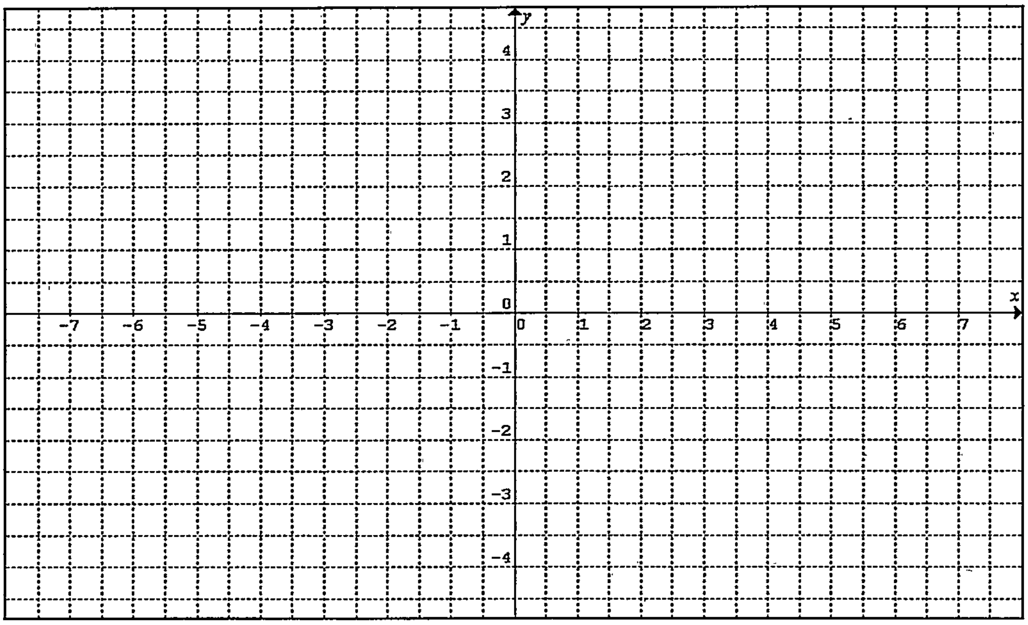
$Dom f =$ ______________________ $Rang f =$ ______________________

2. $f(x) = \frac{1}{|x|}$

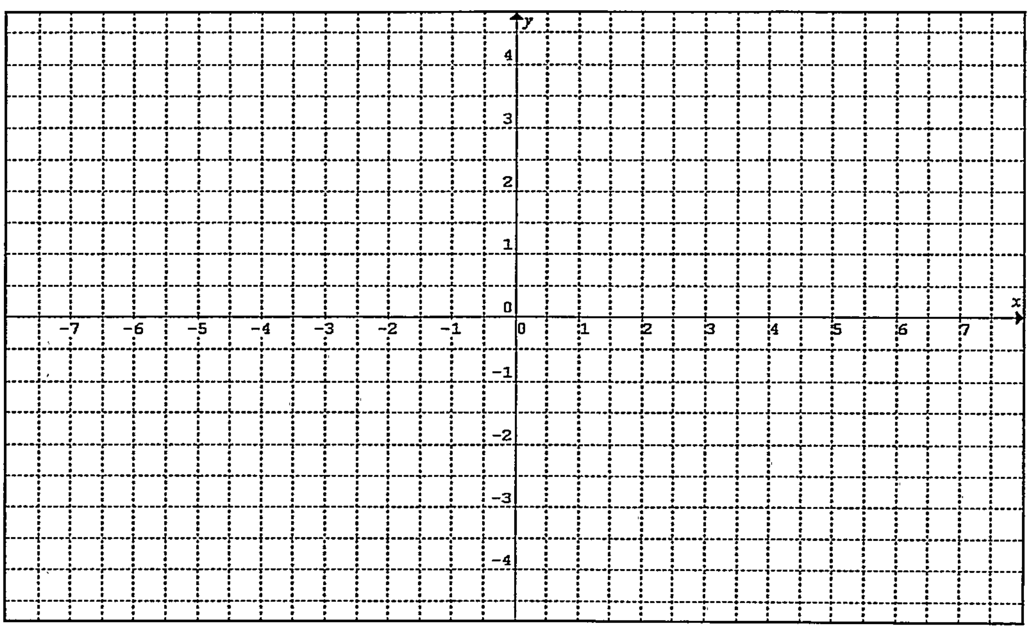


3. $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$

a) $f(x)=\dfrac{1}{x}$



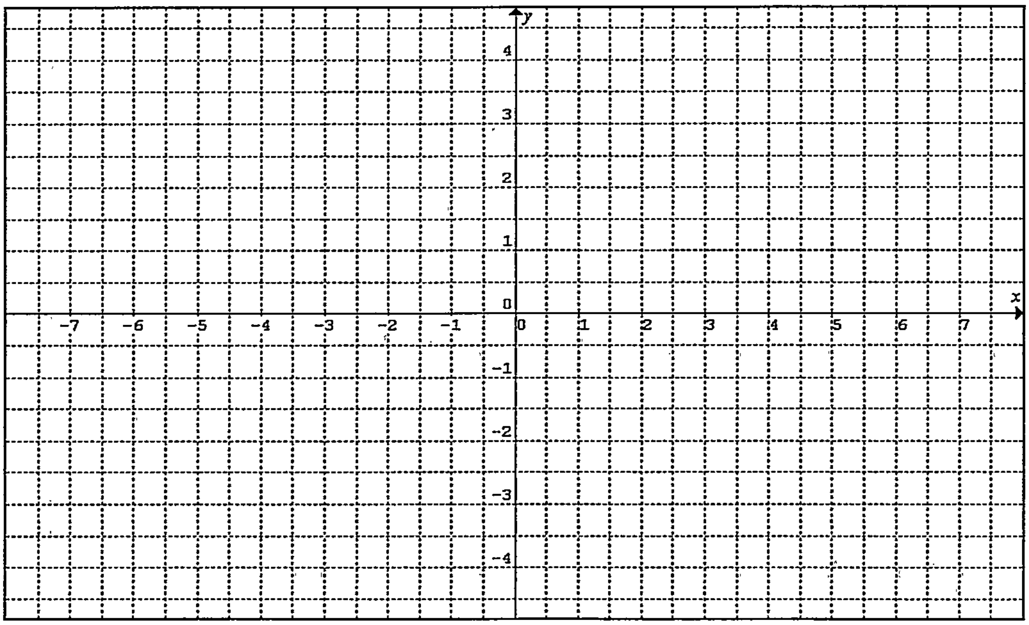
b) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$



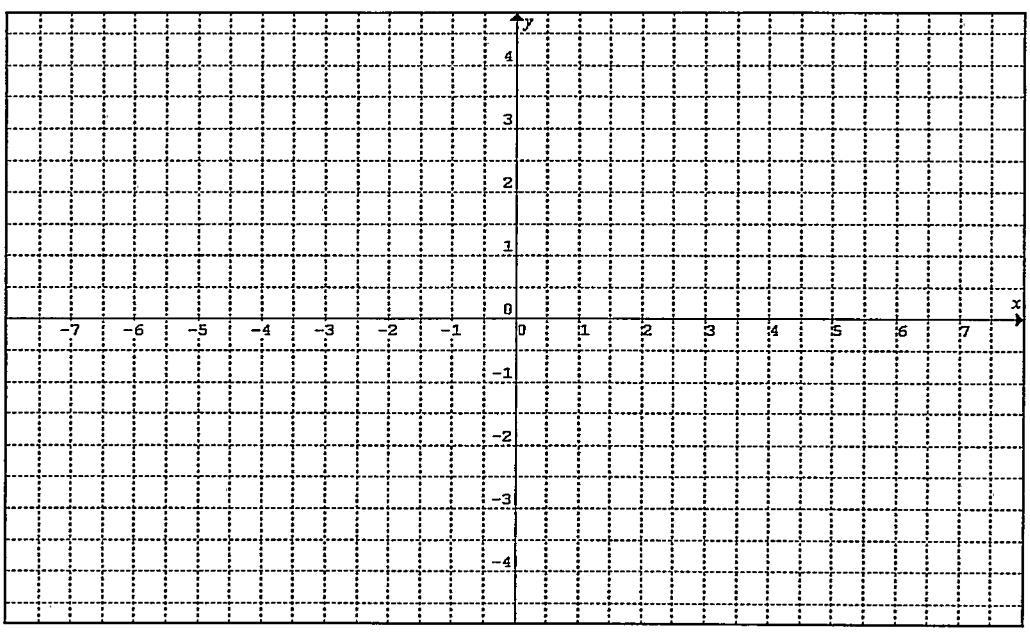
¿Hay cambios en la asíntota horizontal?

4. $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$



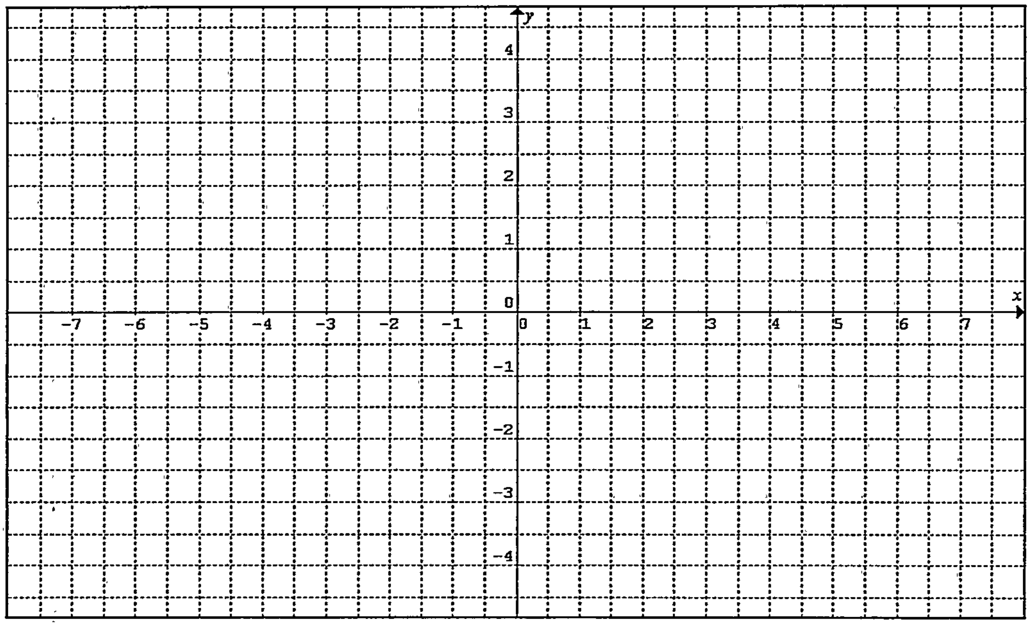
b) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$



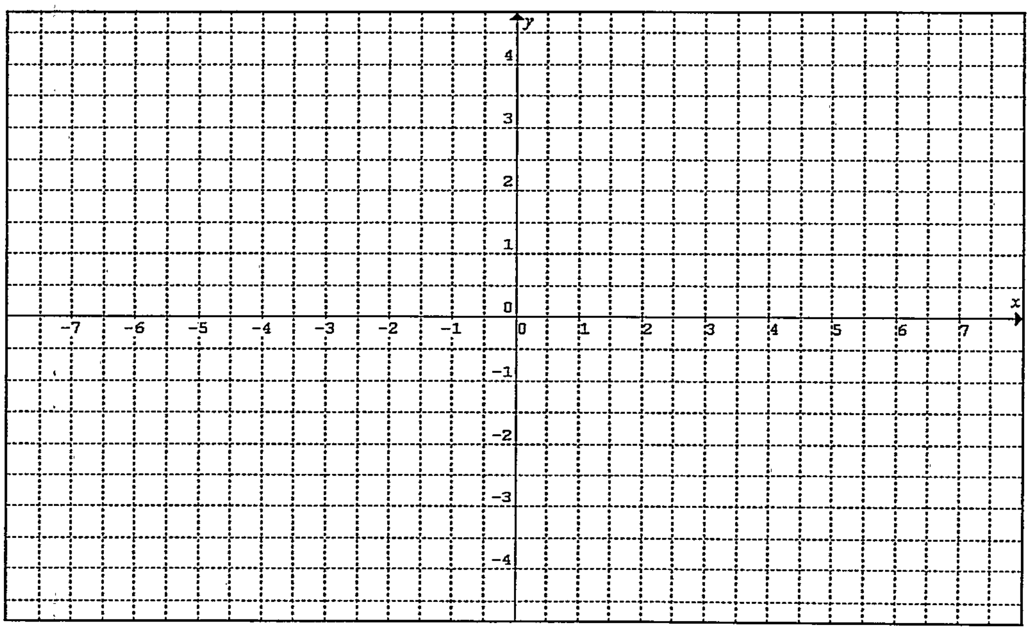
¿Hay cambios en la asíntota horizontal?

5. $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2}$

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$



b) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$



Encuentre los interceptos con los ejes coordenados

Calcule:

$Dom f =$ ______________________ $Rang f =$ ______________________

¿Qué tipo de funciones racionales son las anteriores?

____

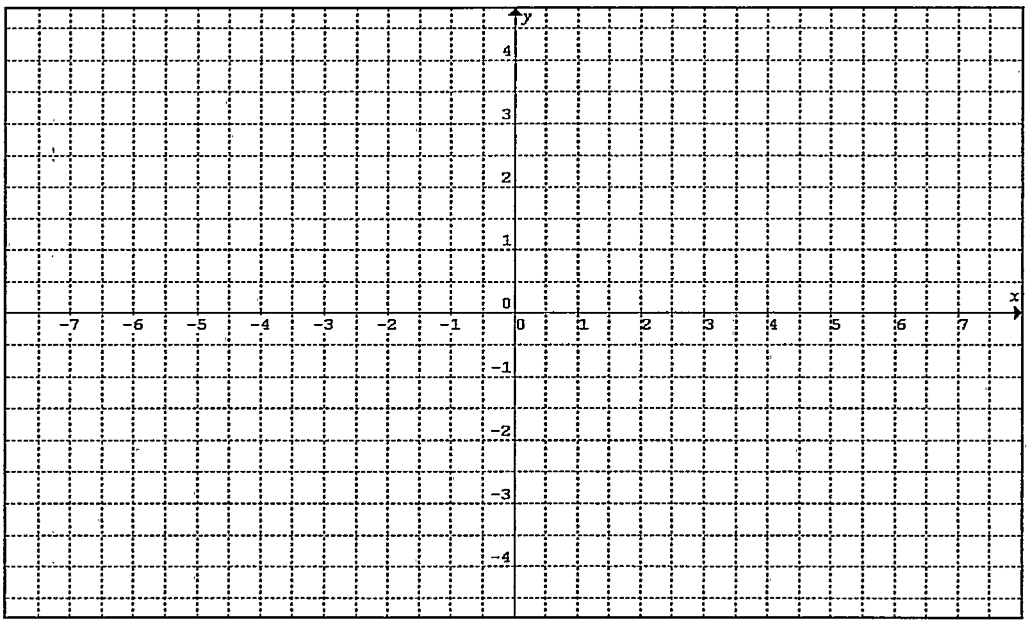
¿Qué tipo de asíntotas tienen?

____

Complete la siguiente tabla respecto a los ejercicios anteriores

Función	Asíntota horizontal	Asíntota vertical
$f(x) = -\frac{1}{x}$		
$f(x) = \frac{1}{\lvert x \rvert}$		
$f(x) = \frac{1}{x-2}$		
$f(x) = \frac{1}{x+1}$		
$f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$		

Grafique la función



Calcule:

Dom f= ______________________

Rang f= ______________________

Calcule las asíntotas de la función *f*, tal que; $\frac{1}{x^2-4}$

Asíntota horizontal	Asíntota vertical

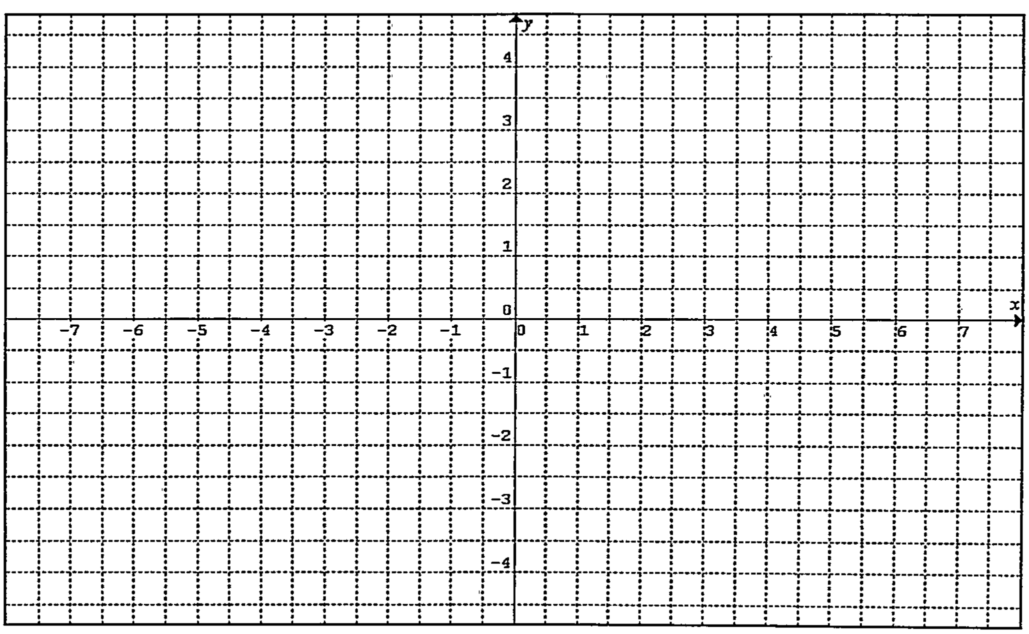
Calcule las asíntotas de la función *f*, tal que; $\frac{1}{|x|-3}$

Asíntota horizontal

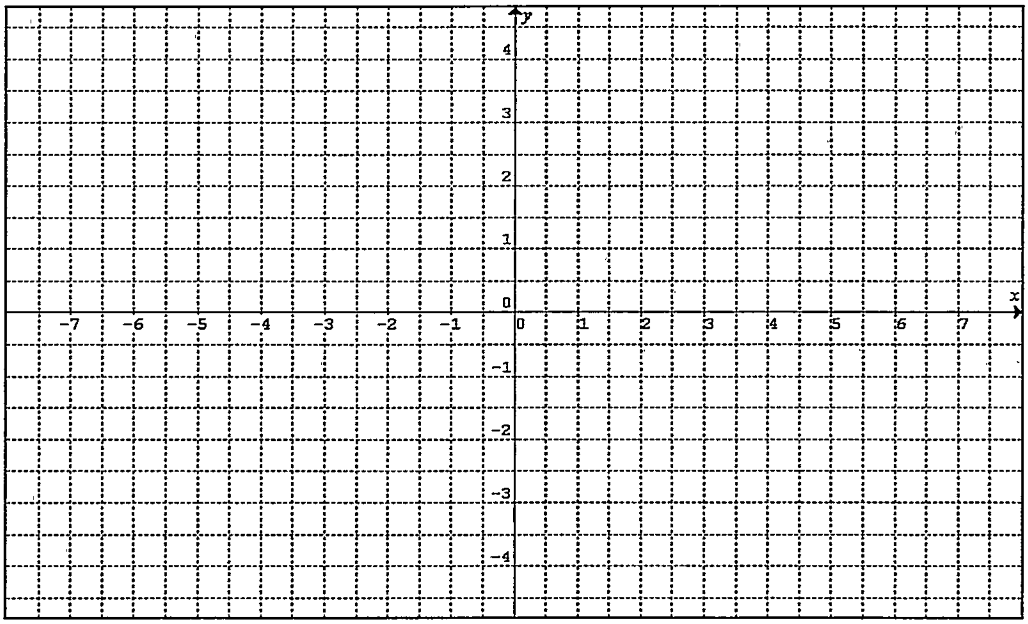
Asíntota vertical

Encuentre los interceptos con los ejes coordenados

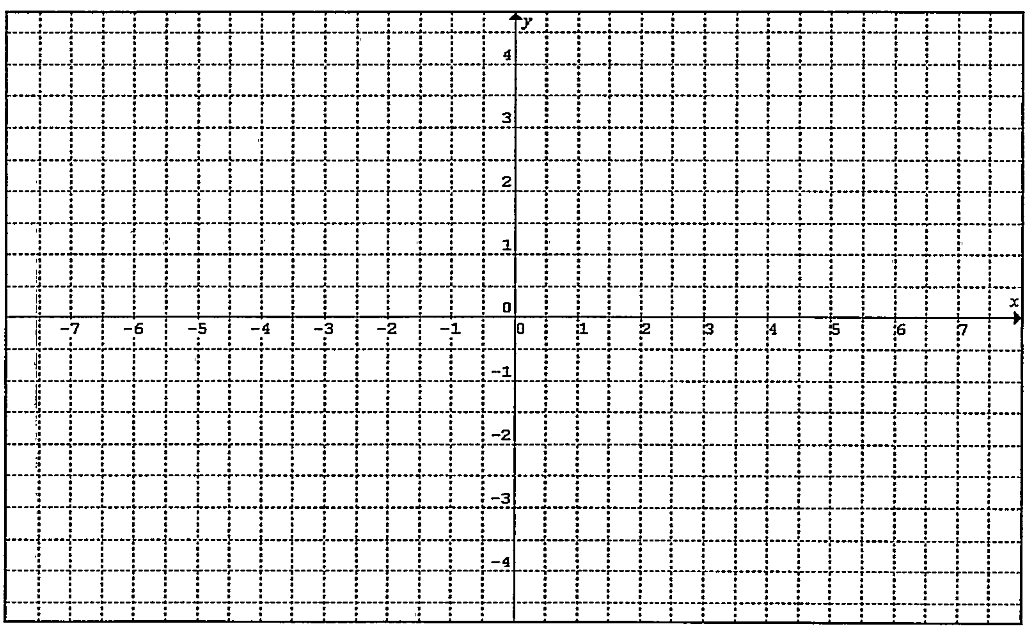
Grafique la función



b) $f(x)=\dfrac{1}{x+0.5}$



c) $f(x)=\dfrac{1}{x+0.5}+2$



¿Qué sucede con la asíntota vertical?

7.3 Gráfica de una función racional impropia

Toda función racional impropia ***f*** puede ser escrita como una ***suma algebraica*** de una función racional propia ***p*** y una función polinómica ***q***. O sea, $f(x)=p(x)+q(x)$.

7.3.1 Cuando *q(x)* es un polinomio de grado cero

Ejemplos:

$$f(x)=\frac{-2x+3}{x-1}$$

$$\begin{array}{rr|l} -2x & +3 & x-1 \\ \cline{3-3} \underline{2x} & \underline{-2} & -2 \\ // & 1 & \end{array}$$

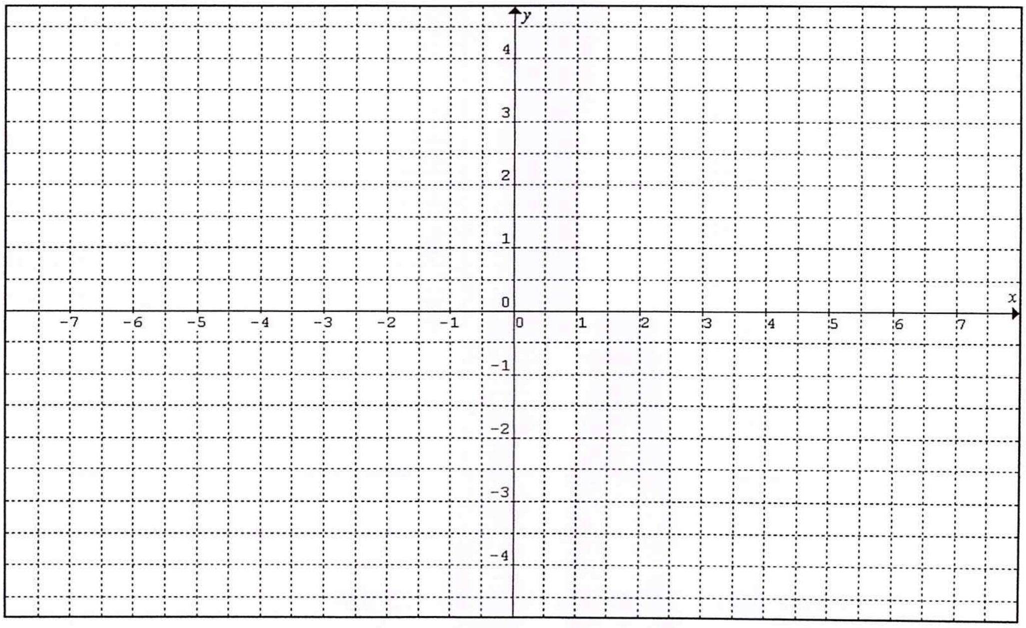
$$\frac{-2x+3}{x-1}=-2+\frac{1}{x-1}$$

$$f(x)=\frac{-2x+3}{x-1} \iff f(x)=\frac{1}{x-1}-2$$

La función original *f*, se reescribe como la suma de $p(x)=\frac{1}{x-1}$ que es función racional propia y $q(x)=-2$ que es función polinómica de grado 0; $f(x)=p(x)+q(x)$.

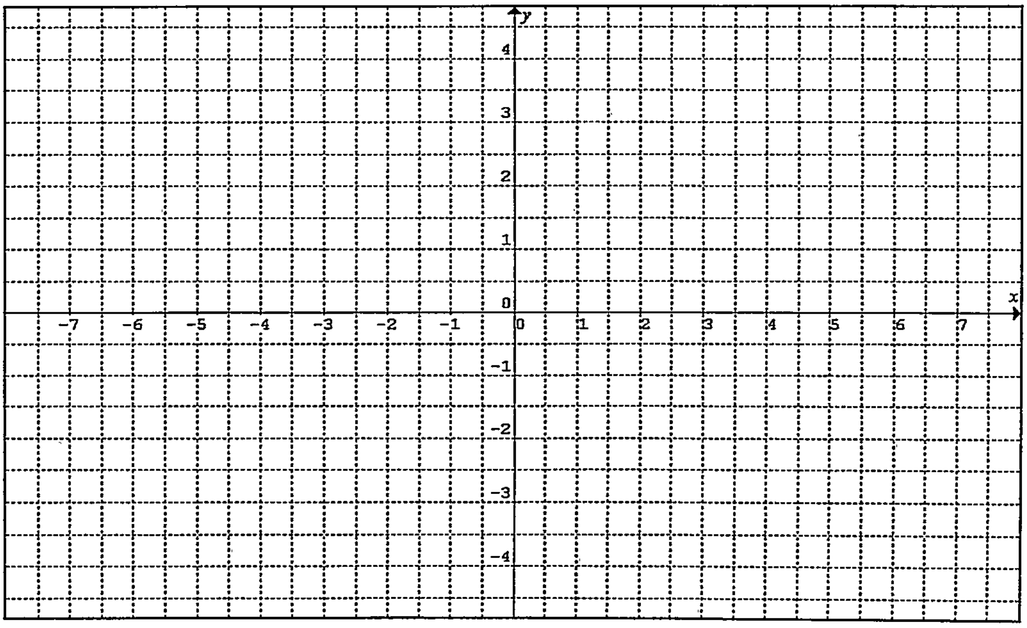
Por tanto, podemos graficar $f(x)=\frac{1}{x-1}-2$, en lugar de $f(x)=\frac{-2x+3}{x-1}$.

Entonces, a) Grafique $f(x)=\frac{1}{x}$

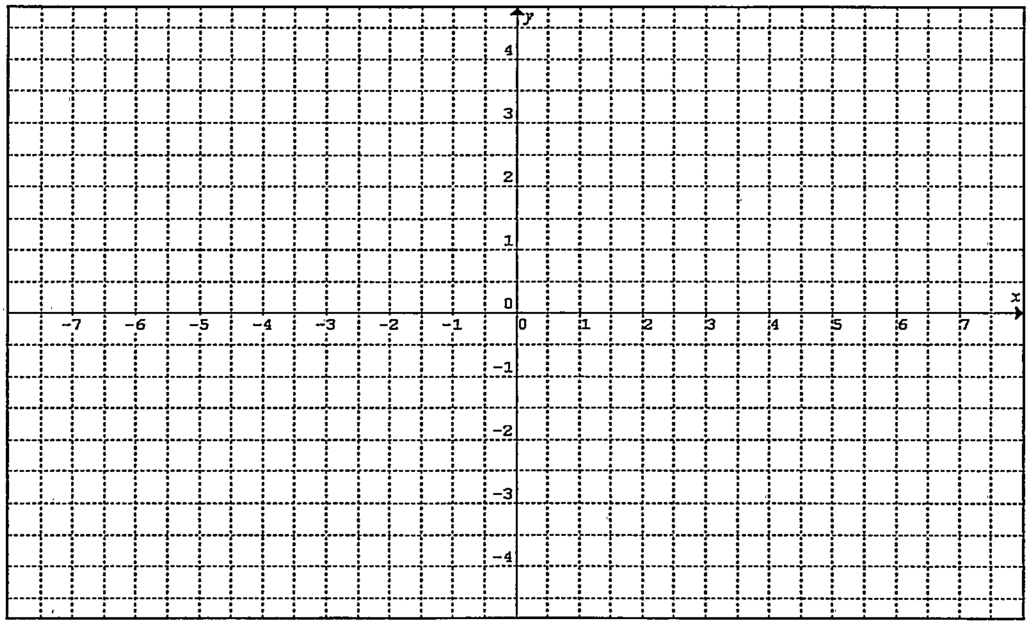


d) Calcule los interceptos con los ejes coordenados

e) Dibuje la gráfica de la función utilizando los interceptos

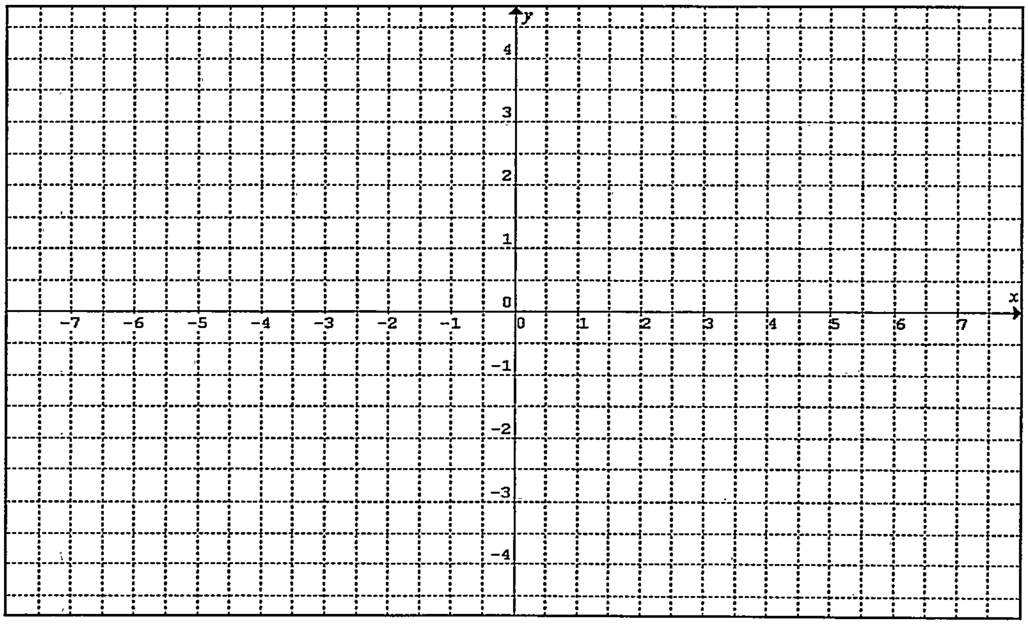


b) Grafique $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$



Escriba la ecuación de la nueva asíntota vertical: ______________________

c) Grafique $f(x)=\dfrac{1}{x+3}+3$



Escriba la ecuación de la nueva asíntota horizontal: ______________________

Grafique la función $f(x) = \frac{1+2x}{x}$

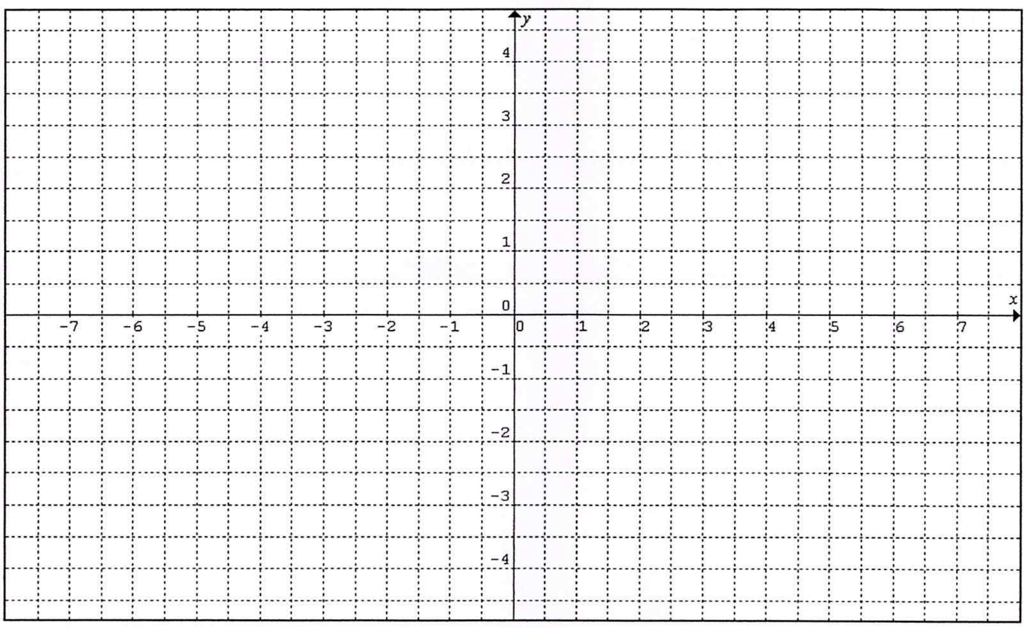
$$f(x) = \frac{1+2x}{x}$$

$$\begin{array}{rr|l} 2x + & 1 & x \\ \cline{3-3} -2x & & 2 \\ \cline{1-2} // & 1 & \end{array}$$

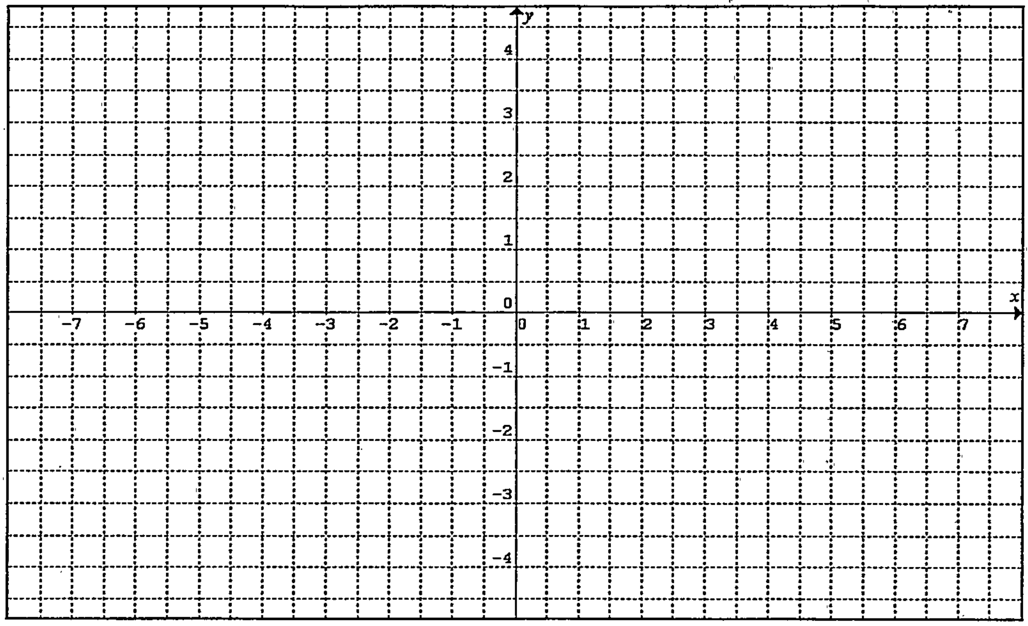
$$\frac{1 + 2x}{x} = \frac{1}{x} + 2$$

$$f(x) = \frac{1 + 2x}{x} \Leftrightarrow f(x) = = \frac{1}{x} + 2$$

a) Grafique $f(x) = \frac{1}{x}$



d) Dibuje la gráfica de la función utilizando los interceptos



Complete la siguiente tabla respecto a los ejercicios anteriores

Función	Asíntota horizontal	Asíntota vertical
$f(x)=\dfrac{-2x+3}{x-1}=\dfrac{1}{x-1}-2$		
$f(x)=\dfrac{3x+10}{x+3}=\dfrac{1}{x+3}+3$		
$f(x)=\dfrac{1+2x}{x}=\dfrac{1}{x}+2$		

Observe el tipo de asíntotas de cada función y comparelas con su respectiva regla de correspondencia. ¿Qué relación hay entre el punto por donde pasa la asíntota y su respectiva regla de correspondencia?

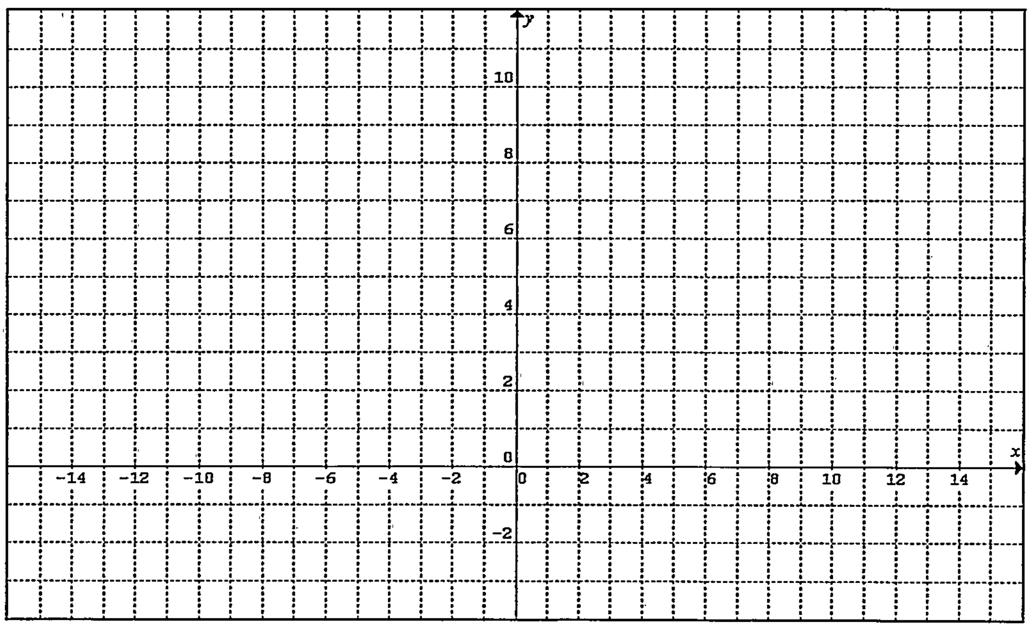
____

¿Qué relación existe entre la asíntota horizontal y el polinomio de grado cero?

____

ii) Calcule los interceptos con el eje x de las asíntotas vertical y oblicua.

iii) Grafique las asíntotas vertical y oblicua.



iv) Elija a-priori dominios de prueba antes, entre y después de los interceptos de las asíntotas vertical y oblicua.

Complete la siguiente tabla:

Dominio de prueba	-6	-5	-4	-3	-2	0	0,7	1	1,4	2	4	7
Imagen del dominio de prueba												
Coordenadas del punto												

Graficar $f(x)=\dfrac{-x^2-x+12}{x+2}$

$$f(x)=\frac{-x^2-x+12}{x+2}$$

$$\begin{array}{rrr|l}
-x^2 & -x & +12 & x+2 \\ \cline{4-4}
x^2 & +2x & & -x+1 \\ \cline{1-2}
// & x & +12 & \\
 & -x & -2 & \\ \cline{2-3}
 & // & 10 &
\end{array}$$

$$f(x)=\frac{-x^2-x+12}{x+2} \Leftrightarrow f(x)=\frac{10}{x+2}+(1-x)$$

Como se puede apreciar, $f(x)=\dfrac{10}{x+2}+(1-x)$ es la suma de una función racional propia $p(x)=\dfrac{10}{x+2}$ y un polinomio de grado uno $q(x)=1-x$.

El ***polinomio de grado*** uno, corresponde a una ***asíntota oblicua*** de la función racional.

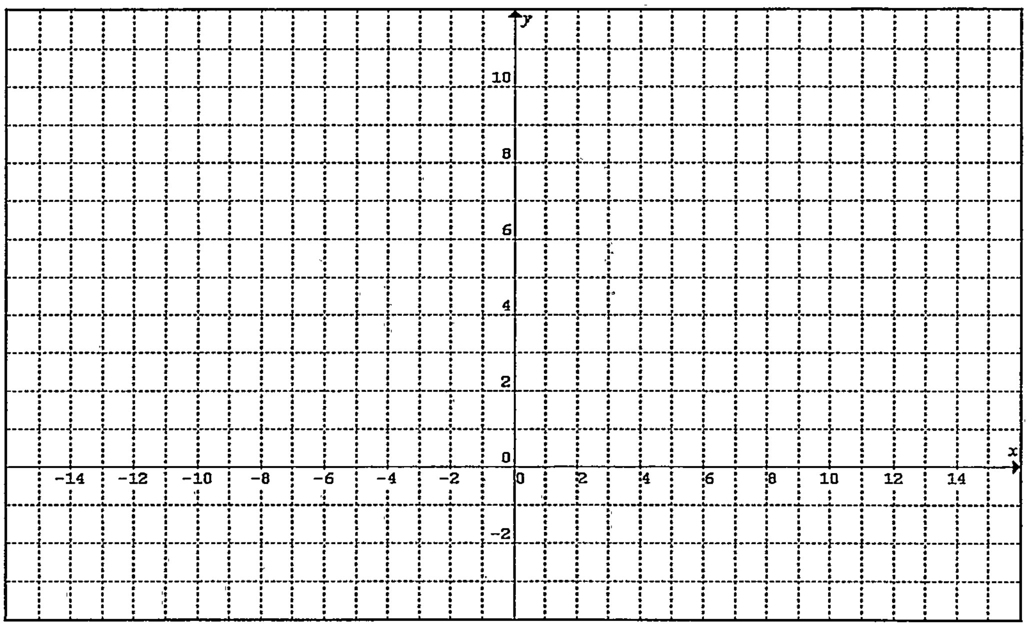
A continuación se describen los pasos para graficar este tipo de funciones racionales:

i) Calcule la asíntota vertical de la función p, $p(x)=\dfrac{10}{x+2}$

---

ii) Calcule los interceptos con el eje x de las asíntotas vertical y oblicua.

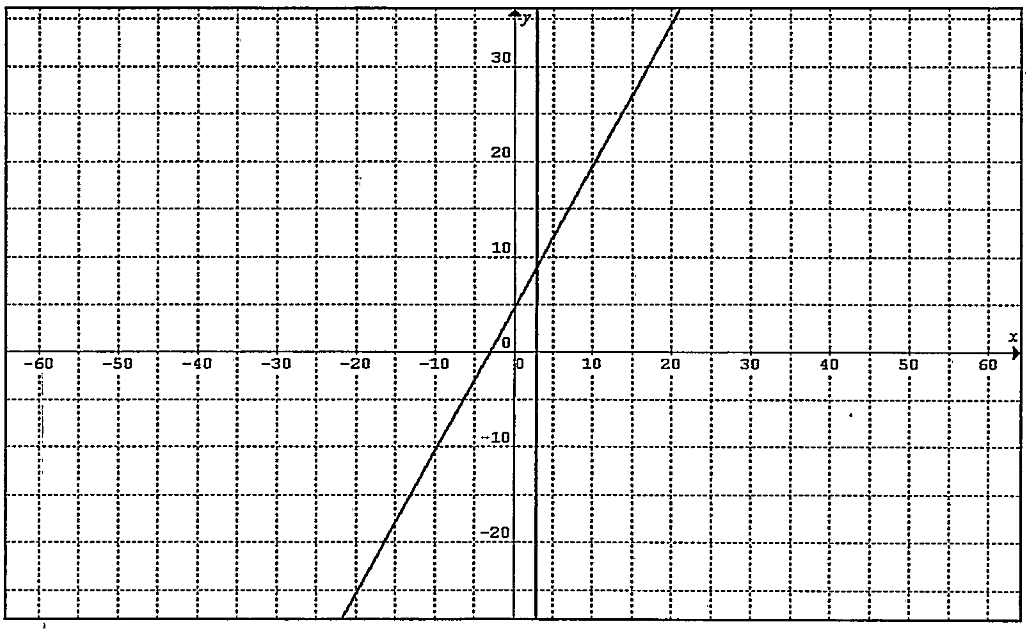
vi) Grafique la función utilizando la información anterior (*la curva se acerca tanto a la asíntota como uno se lo imagine, pero sin tocarla*):



Describa los pasos del proceso para graficar y calcular las asíntotas de una función racional impropia cuando se la expresa como la suma de una función racional propia y un polinomio de grado uno.

$$(-3,0);(-3,0)$$

d) ____



e) ____

Dominio de prueba	-6	-5	-4	-3	-2	0	2	3	4	5	10
Imagen	-5,7	-4,4	-31	[redacted]	0,7	0,8	-3,5	[redacted]	21,5	17,5	21,1

f) ____

$$f(0)=\frac{3(0)^2-5}{2(0)-6}$$

$$f(0)=\frac{5}{6}$$

$$I_y:\left(0,\frac{5}{6}\right)$$

7.3.3 Cuando *q(x)* es un polinomio de grado mayor que uno

Si el polinomio $q(x)$ es de grado mayor que uno, la gráfica de f ***no tiene asíntotas horizontales ni oblicuas***; y su gráfica es muy parecida a la gráfica de la función racional propia $p(x)$.

Ejemplo:

Graficar $f(x)=\dfrac{x^4+1}{x^2}$

$$f(x)=\frac{x^4+1}{x^2}$$

$$\begin{array}{r|l} x^4+1 & x^2 \\ \cline{2-2} \underline{-x^4\quad} & x^2 \\ //\quad 1 & \end{array}$$

$$f(x)=\frac{x^4+1}{x^2} \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{x^2}+x^2$$

La función racional propia p es $p(x)=\dfrac{1}{x^2}$, la función polinómica q es $q(x)=x^2$

No hay asíntotas horizontales ni oblicuas.

Calcule la asíntota vertical

Complete la tabla

Dominio de prueba	-3	-2	-1	0	1	2	3
Imagen				[redacted]			
Coordenada del punto							

Grafique la función $f(x)=\dfrac{x^3}{4(x-2)}$

a) Reescriba la función como la suma de $p(x)$ y $q(x)$

b) Calcule las asíntotas

c) Complete la siguiente tabla

Dominio de prueba	-6	-4	-2	0	1	1,5	2	2,5	3	4
Imagen										
Coordenada del punto										

d) Calcule los interceptos con los ejes coordenados